目　　录

第一章　矢量代数

本书重点研究矢量分析中的符号运算法．由于它是用矢量代数方法、公式来变换矢量微分函数的，因此我们在这一章里先复习一下矢量代数的术语和公式，以便后面引证使用．熟悉矢量代数的读者，可以直接读第二章或第三章．

1-1　矢量函数的表示方法

矢量函数既有大小又有方向．一般来说，我们在科学问题中所遇到的许多矢量函数都是空间和时间的函数．在本书中我们只讨论它们作为空间变量函数的特性．

矢量函数用 $\mathbf{F}$ 来表示．几何上，它用一个在三维空间中带箭头的线段来表示．线段的长度对应于它的大小，而线段的方向则表示矢量函数的方向．用矢量来表示物理量的方便之处可以通过图 1-1 中的简单例子来说明．该例子描述一个质点在真空中在恒定重力吸引下的运动情况．质点以初速 $\mathbf{v}_0$ 沿与地平面成 θ_0 角的方向抛出．在飞行过程中，不同位置上的质点的速度函数（矢

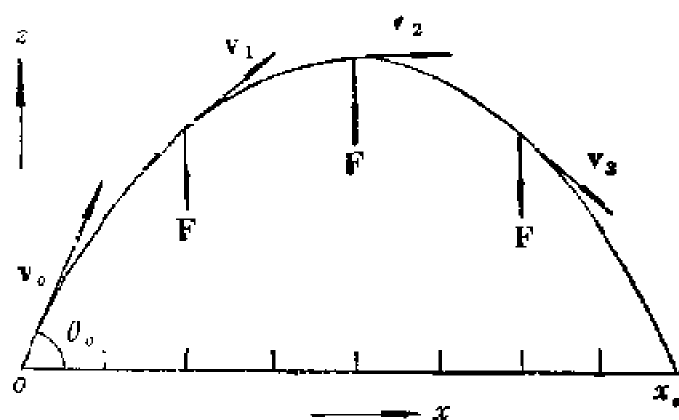


图 1-1　重力场中质点的运动轨迹．图中示出了不同位置上的速度 $\mathbf{v}$ 和恒定力矢量 $\mathbf{F}$

量)既改变大小，又改变方向，如图中的 $\mathbf{v}_1$，$\mathbf{v}_2$ 等所示。作用在质点上的重力假设是恒定的，在图中用 $\mathbf{F}$ 表示。恒定矢量函数的意思是指其大小和方向都是常数，并且在这个例子中它与空间变量 x 和 z 无关。

两个矢量 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 用几何法表示的相加规则见图 1-2(a)，(b) 或 (c)。代数上，它写成两个标量函数数字相加的形式，即

$$\mathbf{c}=\mathbf{a}+\mathbf{b} \tag{1-1}$$

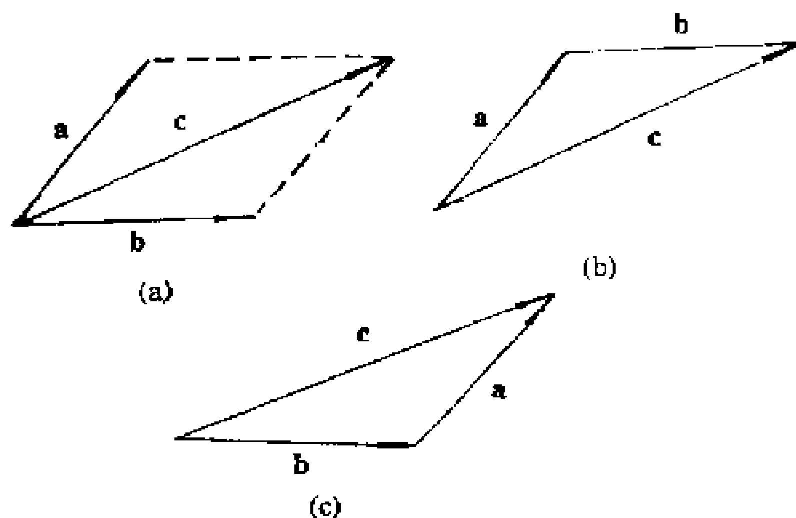


图 1-2 矢量的相加：$\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{c}$

矢量 $\mathbf{a}$ 减去矢量 $\mathbf{b}$ 定义为矢量 $\mathbf{d}$，它加上 $\mathbf{b}$ 后应等于$\mathbf{a}$。$\mathbf{d}$ 或者说 $\mathbf{a}$ 减去 $\mathbf{b}$ 写成下列形式：

$$\mathbf{d}=\mathbf{a}-\mathbf{b} \tag{1-2}$$

注意，$\mathbf{a}-\mathbf{b}$ 是一个整体符号。根据 $\mathbf{a}-\mathbf{b}$ 的定义

$$\mathbf{d}+\mathbf{b}=\mathbf{a} \tag{1-2a}$$

我们定义 $(-\mathbf{b})$ 是一个大小和 $\mathbf{b}$ 一样但方向相反的矢量（这里没有减法的意思）。在式 (1-2a) 两边加上同一个矢量 $(-\mathbf{b})$，得

$$\mathbf{d}+\mathbf{b}+(-\mathbf{b})=\mathbf{a}+(-\mathbf{b})$$

根据 $(-\mathbf{b})$ 的定义 $\mathbf{b}+(-\mathbf{b})=0$，于是，

$$\mathbf{d}=\mathbf{a}+(-\mathbf{b}) \tag{1-2b}$$

因此式(1-2)可以看成是 $\mathbf{a}$ 和 $(-\mathbf{b})$ 的相加。式(1-2)的几何意义见图 1-3。

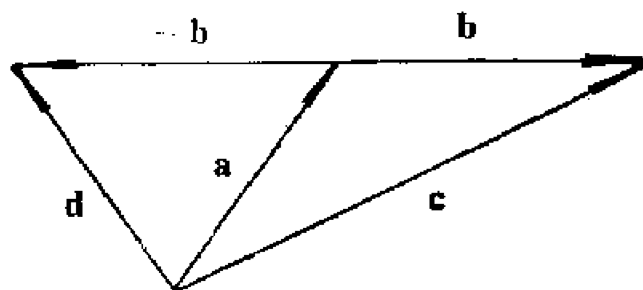


图 1-3 矢量的相减：$\mathbf{a}-\mathbf{b}=\mathbf{d}$

由式(1-2b)可以得出结论：矢量 $\mathbf{a}$ 减去矢量 $\mathbf{b}$ 就是矢量 $\mathbf{a}$ 加上一个与 $\mathbf{b}$ 大小相等、方向相反的矢量．两个矢量的和及差满足交换律，即

$$\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{b}+\mathbf{a} \tag{1-3}$$

和

$$\mathbf{a}-\mathbf{b}=-\mathbf{b}+\mathbf{a} \tag{1-4}$$

这两个关系式可以推广到任意数目的矢量上．

矢量相加的规则表明，任意一个矢量都可以看成由与某一坐标系有关的几个基本分量所组成．最便于应用的坐标系是笛卡儿坐标系或直角坐标系．这种坐标系中的空间变量通常用 x，y 和 z 表示．大小等于1并指向 x 轴正方向的矢量称为 x 方向上的单位矢量，用 $\mathbf{i}$ 表示．类似的单位矢量还有 $\mathbf{j}$ 和 $\mathbf{k}$．在这样的坐标系中，一般作为位置函数的矢量函数 $\mathbf{F}$，可以写成下列形式：

$$\mathbf{F}=\mathbf{i}F_x+\mathbf{j}F_y+\mathbf{k}F_z \tag{1-5}$$

三个标量函数 F_x，F_y 和 F_z 称为 $\mathbf{F}$ 分别相应于 $\mathbf{i},\mathbf{j}$ 和 $\mathbf{k}$ 方向上的分量，而 $\mathbf{i}F_x,\mathbf{j}F_y$ 和 $\mathbf{k}F_z$ 则称为 $\mathbf{F}$ 的矢量分量．$\mathbf{F}$的几何表示见图 1-4．从图中可以看出：F_x，F_y 和 F_z 可以是正的，也可以是负的．图 1-4 中的 F_x 和 F_z 是正的，但 F_y 是负的．

除了式(1-5)这种表示方式之外，$\mathbf{F}$ 的另一种有用表示方式是通过其大小(用$|\mathbf{F}|$表示)和方向余弦来表示，即

$$\mathbf{F}=|\mathbf{F}|(\cos\alpha\mathbf{i}+\cos\beta\mathbf{j}+\cos\gamma\mathbf{k}) \tag{1-6}$$

式中，α,β 和 γ 是 $\mathbf{F}$ 分别相应与 $\mathbf{i},\mathbf{j}$ 和 $\mathbf{k}$ 所成的角度，如图 1-4 所示，由图形的几何结构显然可见

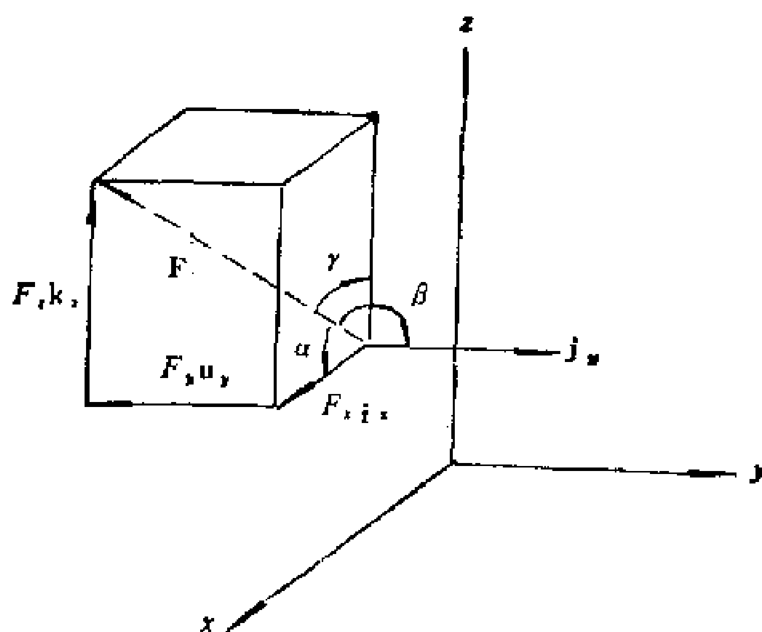


图 1-4　直角坐标系中的矢量分量

$$|\mathbf{F}| = (F_x^2 + F_y^2 + F_z^2)^{\frac{1}{2}} \tag{1-7}$$

以及

$$\cos\alpha = \frac{F_x}{|\mathbf{F}|}, \quad \cos\beta = \frac{F_y}{|\mathbf{F}|}, \quad \cos\gamma = \frac{F_z}{|\mathbf{F}|} \tag{1-8}$$

其次，有关系式

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 \tag{1-9}$$

这可通过将式(1-8)中的三式平方相加并利用式(1-7)得出。由式(1-9)可见只有两个方向余弦是独立的，即可任意给定两个方向余弦，第三个由式(1-9)决定。由此可见，一般来说共需要三个参数来确定一个矢量函数。这三个参数可以是 F_x，F_y 和 F_z，或者是 $|\mathbf{F}|$ 和两个方向余弦角。式(1-5)和(1-6)的表示方式可以推广到其他正交坐标系上去。这个问题我们在第三章中讨论。

最后，我们还要指出，三个矢量 **a**，**b**，**c** 满足结合律，即

$$\mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c}$$

这条规律也可推广到任意数目的矢量上去。

1-2　矢量的乘积和矢量恒等式

两个矢量 **a** 和 **b** 的标量积用 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ 表示。它定义为

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\theta \quad (1\text{-}10)$$

式中，θ 是 **a** 和 **b** 之间的角度，如图 1-5 所示。因为这种乘积的符号中有“·”号，所以它有时也称为点积。将式(1-10) 用到三个相互正交的单位矢量 $\mathbf{u}_1$，$\mathbf{u}_2$，$\mathbf{u}_3$ 上，得

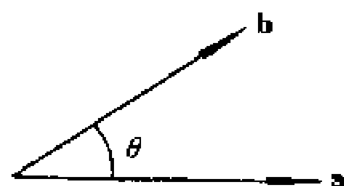


图 1-5　两矢量的标量积：$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\theta$

$$\mathbf{u}_i\cdot\mathbf{u}_j=\begin{cases}1, & i=j\\0, & i\neq j\end{cases}\quad i,j=1,2,3 \qquad (1\text{-}11)$$

$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ 的值也可以通过 **a** 和 **b** 在任意正交坐标系中的分量来表示。令所考虑的坐标系是直角坐标系统，并令 $\mathbf{c}=\mathbf{a}-\mathbf{b}$，于是

$$|\mathbf{c}|^2=|\mathbf{a}-\mathbf{b}|^2=|\mathbf{a}|^2+|\mathbf{b}|^2-2|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\theta$$

由此得

$$\begin{aligned}\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}&=|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\theta=\frac{|\mathbf{a}|^2+|\mathbf{b}|^2-|\mathbf{a}-\mathbf{b}|^2}{2}\\&=\frac{a_x^2+a_y^2+a_z^2+b_x^2+b_y^2+b_z^2-(a_x-b_x)^2-(a_y-b_y)^2-(a_z-b_z)^2}{2}\\&=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z\\&=a_xb_x+b_ya_y+b_za_z\\&=\cdots\end{aligned}\qquad (1\text{-}12)$$

将式(1-10)和(1-12)等同起来，我们得到

$$\begin{aligned}\cos\theta&=\frac{1}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|}(a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z)\\&=\cos\alpha_a\cos\alpha_b+\cos\beta_a\cos\beta_b+\cos\gamma_a\cos\gamma_b\end{aligned}\qquad (1\text{-}13)$$

这是一个解析几何学中众所周知的关系式。

下面我们来证明标量积所满足的分配律,即

$$\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}_1+\mathbf{B}_2)=\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}_1+\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}_2 \tag{1-14}$$

令 $\mathbf{B}=\mathbf{B}_1+\mathbf{B}_2$,于是 $\mathbf{B},\mathbf{B}_1,\mathbf{B}_2$ 在 $\mathbf{A}$ 方向或 $\hat{\mathbf{A}}$(单位矢量)上的矢量分量为 $\mathbf{B}',\mathbf{B}_1',\mathbf{B}_2'$,如图 1-6 所示。由 $\mathbf{B}_1,\mathbf{B}_2$ 和 $\mathbf{B}$ 所组成

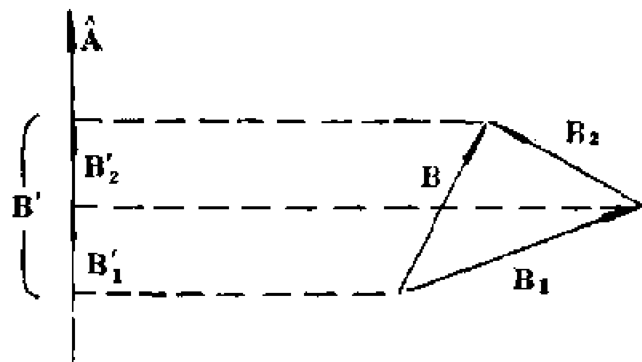


图 1-6 $\mathbf{B},\mathbf{B}_1,\mathbf{B}_2$ 在 $\hat{\mathbf{A}}$ 方向上的投影

的三角形是一个三维空间中的三角形,它不一定与 $\mathbf{A}$ 共面,于是

$$\hat{\mathbf{A}}\cdot\mathbf{B}'=\hat{\mathbf{A}}\cdot\mathbf{B}_1'+\hat{\mathbf{A}}\cdot\mathbf{B}_2' \tag{1-15}$$

因为

$$\left.\begin{aligned}\hat{\mathbf{A}}\cdot\mathbf{B}&=\hat{\mathbf{A}}\cdot\mathbf{B}'\\ \hat{\mathbf{A}}\cdot\mathbf{B}_1&=\hat{\mathbf{A}}\cdot\mathbf{B}_1'\\ \hat{\mathbf{A}}\cdot\mathbf{B}_2&=\hat{\mathbf{A}}\cdot\mathbf{B}_2'\end{aligned}\right\} \tag{1-16}$$

所以我们得到

$$\hat{\mathbf{A}}\cdot\mathbf{B}=\hat{\mathbf{A}}\cdot(\mathbf{B}_1+\mathbf{B}_2)=\hat{\mathbf{A}}\cdot\mathbf{B}_1+\hat{\mathbf{A}}\cdot\mathbf{B}_2 \tag{1-17}$$

将式(1-17)乘以 $|\mathbf{A}|$ (即 $\mathbf{A}$ 的大小),有

$$\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}_1+\mathbf{B}_2)=\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}_1+\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}_2 \tag{1-18}$$

将式(1-18)重复地应用到三个以上的矢量函数中去,我们可以把它推广到任意数目矢量的情况。例如,如果

$$\mathbf{A}=\sum_i A_i\hat{\mathbf{x}}_i,\quad \mathbf{B}=\sum_j B_j\hat{\mathbf{x}}_j \tag{1-19}$$

那末

$$\begin{aligned}\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}&=\sum_i\sum_j A_iB_j\hat{\mathbf{x}}_i\cdot\hat{\mathbf{x}}_j\\ &=\sum_i A_iB_i \end{aligned}\tag{1-20}$$

分配律也可以用式(1-12)来证明。根据式(1-12)我们有

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}_1+\mathbf{B}_2)\\
&=A_x(B_{1x}+B_{2x})+A_y(B_{1y}+B_{2y})\\
&\quad+A_z(B_{1z}+B_{2z})\\
&=(A_xB_{1x}+A_yB_{1y}+A_zB_{1z})\\
&\quad+(A_xA_{2x}+A_yB_{2y}+A_zB_{2z})\\
&=\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}_1+\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}_2
\end{aligned}
$$

一旦证明了标量积的分配律之后，式(1-12)就可以通过取 **a** 和 **b** 各矢量分量之间的标量积之和来验证。

两个矢量函数 **a** 和 **b** 的矢量积用 $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ 表示。它的定义如下：

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin\theta\,\mathbf{u}_c \tag{1-21}$$

式中，θ 表示 **a** 和 **b** 之间的角度，从 **a** 算起至 **b**；$\mathbf{u}_c$ 表示一个既垂直于 **a** 又垂直于 **b** 的单位矢量，而且它指向一个由 **a** 旋至 **b** 右手螺旋的前进方向。图 1-7 中示出了相对于 **a** 和 **b** 的 $\mathbf{u}_c$ 的位置。

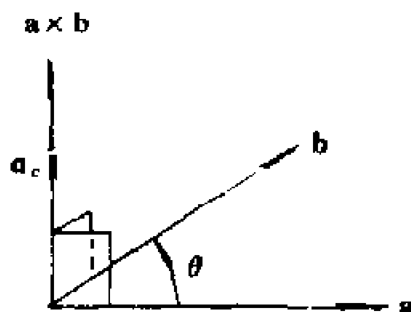


图 1-7　两个矢量的矢量积，
$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin\theta\mathbf{u}_c$，$\mathbf{u}_c\perp\mathbf{a}$，$\mathbf{u}_c\perp\mathbf{b}$

由于矢量积的符号中有"×"号，故有时它也称为叉积。这一名称可与将标量积称为点积的情况相比拟。对于右手坐标系中的三个正交单位矢量，根据矢量积的定义，我们立即可以看出 $\mathbf{i}\times\mathbf{j}=\mathbf{k}$，$\mathbf{j}\times\mathbf{k}=\mathbf{i}$，$\mathbf{k}\times\mathbf{i}=\mathbf{j}$。显然，$\mathbf{i}\times\mathbf{i}=0$，$\mathbf{j}\times\mathbf{j}=0$，$\mathbf{k}\times\mathbf{k}=0$。这里由于 **i** 和 **i** 等之间的夹角 $\theta=0$，故叉积为 0。由式(1-21)所规定的矢量积定义，可得

$$\mathbf{b}\times\mathbf{a}=-\mathbf{a}\times\mathbf{b} \tag{1-22}$$

式(1-21)中 $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ 的值，也可以通过 **a** 和 **b** 在直角坐标系中的分量来表示。如果我们令 $\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\mathbf{v}=v_x\mathbf{i}+v_y\mathbf{j}+v_z\mathbf{k}$，由于它既垂直于 **a** 又垂直于 **b**，因此

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{v}=a_xv_x+a_yv_y+a_zv_z=0 \tag{1-23}$$

$$\mathbf{b}\cdot\mathbf{v}=b_xv_x+b_yv_y+b_zv_z=0 \tag{1-24}$$

对 v_x/v_z 和 v_y/v_z 求解，由式(1-23)和(1-24)我们得到

$$\frac{v_x}{v_z}=\frac{a_yb_z-a_zb_y}{a_xb_y-a_yb_x},\quad \frac{v_y}{v_z}=\frac{a_zb_x-a_xb_z}{a_xb_y-a_yb_x}$$

由此

$$\frac{v_x}{a_yb_z-a_zb_y}=\frac{v_y}{a_zb_x-a_xb_z}=\frac{v_z}{a_xb_y-a_yb_x}$$

令这三个量的公共比值为 c. c 值可以通过考虑 $\mathbf{a}=\mathbf{i}$ 和 $\mathbf{b}=\mathbf{j}$ 的情况来确定。这时，$\mathbf{v}=\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\mathbf{k}$，由于 $v_z=1$ 和 $a_x=b_y=1$ 而 $a_y=b_x=0$，故按最后一个比例式可得 $c=1$。由此，$\mathbf{v}$ 的三个分量由下式表示：

$$\left.\begin{aligned}v_x&=a_yb_z-a_zb_y\\ v_y&=a_zb_x-a_xb_z\\ v_z&=a_xb_y-a_yb_x\end{aligned}\right\} \tag{1-25}$$

这组表示式可以综合成行列式的形式，表示如下：

$$\mathbf{v}=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\ a_x&a_y&a_z\\ b_x&b_y&b_z\end{vmatrix} \tag{1-26}$$

下面我们来证明矢量积满足分配律，即

$$\mathbf{A}\times(\mathbf{B}_1+\mathbf{B}_2)=\mathbf{A}\times\mathbf{B}_1+\mathbf{A}\times\mathbf{B}_2 \tag{1-27}$$

由 $\mathbf{B}$, $\mathbf{B}_1$ 和 $\mathbf{B}_2$ 所组成的三角形，在一个垂直于 $\hat{\mathbf{A}}$ 的平面

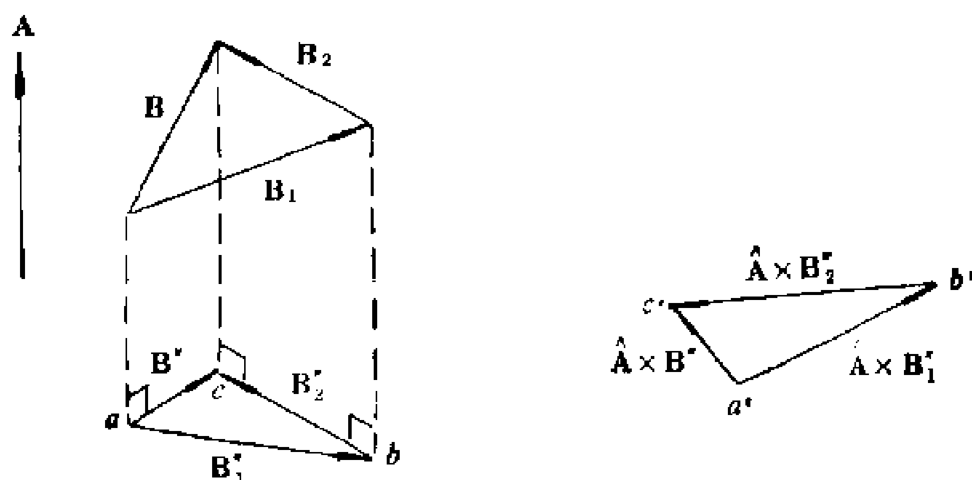


图 1-8 $\mathbf{B}$, $\mathbf{B}_1$, $\mathbf{B}_2$ 在垂直于 $\hat{\mathbf{A}}$ 的平面上的投影

上的投影如图 1-8 所示。投影三角形的各边用 $\mathbf{B}''$,$\mathbf{B}_1''$ 和 $\mathbf{B}_2''$ 表示。把这个三角形绕一个与 $\mathbf{A}$ 平行的轴转 90°,我们就得到另一个三角形,它的各边对应于 $\hat{\mathbf{A}}\times\mathbf{B}_1''$, $\hat{\mathbf{A}}\times\mathbf{B}_2''$ 及 $\hat{\mathbf{A}}\times\mathbf{B}''$, 并且,

$$\hat{\mathbf{A}}\times\mathbf{B}''=\hat{\mathbf{A}}\times\mathbf{B}_1''+\hat{\mathbf{A}}\times\mathbf{B}_2'' \tag{1-28}$$

因为

$$\left.\begin{aligned}\hat{\mathbf{A}}\times\mathbf{B}&=\hat{\mathbf{A}}\times\mathbf{B}''\\ \hat{\mathbf{A}}\times\mathbf{B}_1&=\hat{\mathbf{A}}\times\mathbf{B}_1''\\ \hat{\mathbf{A}}\times\mathbf{B}_2&=\hat{\mathbf{A}}\times\mathbf{B}_2''\end{aligned}\right\} \tag{1-29}$$

所以我们得到

$$\hat{\mathbf{A}}\times\mathbf{B}=\hat{\mathbf{A}}\times\mathbf{B}_1+\hat{\mathbf{A}}\times\mathbf{B}_2 \tag{1-30}$$

将式(1-30)乘以 $|\mathbf{A}|$, 有

$$\mathbf{A}\times(\mathbf{B}_1+\mathbf{B}_2)=\mathbf{A}\times\mathbf{B}_1+\mathbf{A}\times\mathbf{B}_2 \tag{1-31}$$

将式(1-31)重复地应用到三个以上的矢量中去,我们就可以把它推广到任意数目矢量的情况。例如,

$$\begin{aligned}\left(\sum_i A_i\hat{\mathbf{x}}_i\right)\times\left(\sum_k B_k\hat{\mathbf{x}}_k\right)&=\sum_j\sum_k A_jB_k\hat{\mathbf{x}}_j\times\hat{\mathbf{x}}_k\\ &=\sum_{i,j,k}(A_jB_k-A_kB_j)\hat{\mathbf{x}}_i\end{aligned} \tag{1-32}$$

式中, i,j,k 以 1,2,3 的循环顺序选取。我们也可以用式(1-26)来证明分配律。根据式(1-26), $\mathbf{A}\times(\mathbf{B}_1+\mathbf{B}_2)$ 的 x 分量是

$$\begin{aligned}&A_y(B_{1z}+B_{2z})-A_z(B_{1y}+B_{2y})\\ &=(A_yB_{1z}-A_zB_{1y})+(A_yB_{2z}-A_zB_{2y})\end{aligned} \tag{1-33}$$

式(1-33)中的最后两项相应地表示 $\mathbf{A}\times\mathbf{B}_1$ 和 $\mathbf{A}\times\mathbf{B}_2$ 的 x 分量。式(1-27)中 y 和 z 分量的等式用同样的方式证明。由于等式左边的三个分量等于右边三个分量,所以等式成立。

除了上面所引入的标量积和矢量积之外,还有两个在矢量分析中很有用的三重积等式。它们是:

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=\mathbf{b}\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{a})=\mathbf{c}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) \tag{1-34}$$

$$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})\mathbf{b}-(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\mathbf{c} \tag{1-35}$$

由式(1-34)所表述的等式，可以通过把 $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$ 写成行列式形式来证明：

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}$$

根据行列式理论

$$\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\\ a_1 & a_2 & a_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}c_1 & c_2 & c_3\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}$$

上式中的后两个行列式相应地表示 $\mathbf{b}\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{a})$ 和 $\mathbf{c}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b})$. 由此式(1-34)成立。

为了证明式(1-35)，我们注意到矢量 $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$ 位于含有 $\mathbf{b}$ 和 $\mathbf{c}$ 的平面内，这是因为根据矢量积的定义，$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$ 垂直于 $\mathbf{b}\times\mathbf{c}$ (当然也同时垂直于 $\mathbf{a}$). 而根据 $\mathbf{b}\times\mathbf{c}$ 的定义，垂直于 $\mathbf{b}\times\mathbf{c}$ 的矢量必然位于含有 $\mathbf{b}$ 和 $\mathbf{c}$ 的平面内。

根据上述，我们可以把 $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$ 分解为 $\alpha\mathbf{b}$ 和 $\beta\mathbf{c}$，然后求和，如图 1-9 所示．这里 α 和 β 是数值系数。用数学式子表示，就是

$$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=\alpha\mathbf{b}+\beta\mathbf{c} \tag{1-36}$$

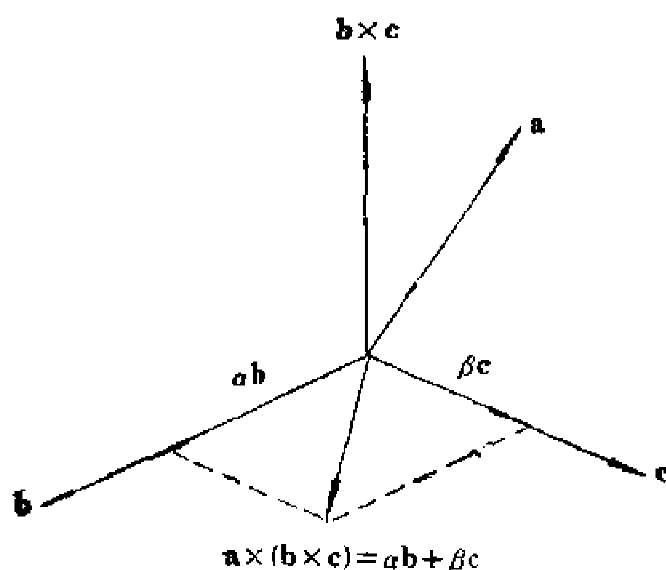


图 1-9 $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$ 中的不同矢量的指向

由于

$$\mathbf{a}\cdot[\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})]=0$$

于是

$$\alpha(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})+\beta(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})=0$$

从而式(1-36)可以写成下列形式:

$$\begin{aligned}\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})&=\alpha\left[\mathbf{b}-\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}}\mathbf{c}\right]\\&=\alpha'[(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})\mathbf{b}-(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\mathbf{c}]\end{aligned}\tag{1-37}$$

式中的 α' 是一个待定系数。我们考虑 $\mathbf{a}=\mathbf{j}$, $\mathbf{b}=\mathbf{i}$ 和 $\mathbf{c}=\mathbf{j}$ 的情况,这时有

$$\begin{aligned}\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})&=\mathbf{j}\times(\mathbf{i}\times\mathbf{j})\\&=\mathbf{j}\times\mathbf{k}=\mathbf{i}\\(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})\mathbf{b}&=(\mathbf{j}\cdot\mathbf{j})\mathbf{i}=\mathbf{i}\\(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\mathbf{c}&=(\mathbf{j}\cdot\mathbf{i})\mathbf{j}=0\end{aligned}$$

于是

$$\mathbf{i}=\alpha'(\mathbf{i}-0)=\alpha'\mathbf{i}$$

即

$$\alpha'=1$$

从而式(1-35)成立.用同样方法可以证明,如果单位矢量 $\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}$ 组成左旋坐标系,那末仍然能获得同样的结果。换句话说,式(1-34)和(1-35)的成立与用什么旋向的坐标系来表示 $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ 是无关的。

下面我们来举几个运算例子.

例 1 证明

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{d})=(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{d})-(\mathbf{a}\cdot\mathbf{d})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})\tag{1-38}$$

(这个公式叫拉格朗日公式或拉普拉斯公式)

证明:

$$\begin{aligned}&(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{d})\\&=\mathbf{a}\cdot[\mathbf{b}\times(\mathbf{c}\times\mathbf{d})]\qquad(\text{利用式(1-34)})\\&=\mathbf{a}\cdot[\mathbf{c}(\mathbf{b}\cdot\mathbf{d})-\mathbf{d}(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})]\qquad(\text{利用式(1-35)})\\&=(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{d})-(\mathbf{a}\cdot\mathbf{d})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})\qquad(\text{分配律})\end{aligned}$$

例 2 证明

$$|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|^2+|\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}|^2=|\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2 \tag{1-39}$$

(这个公式叫拉格朗日恒等式)

证明:

$$|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|=|\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|\cdot|\sin\theta|$$

$$|\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}|=|\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|\cdot|\cos\theta|$$

式中,θ 为 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 之间的角度。由此得

$$\begin{aligned}&|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|^2+|\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}|^2\\&\quad=|\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2(\sin^2\theta+\cos^2\theta)\\&\quad=|\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2\end{aligned}$$

1-3 复矢量代数

在电磁场理论中,人们广泛地使用所谓麦克斯韦方程组的复数形式。在复数麦克斯韦方程组中,需用到复矢量,以及要对复矢量进行微积分运算。因此,有必要对复矢量的性质及其运算方法作一些介绍。下文中的讨论将表明:从运算角度来看,复矢量运算规则和实矢量是一样的。但是,从几何角度而言,多数复矢量及其运算并没有明显的意义。

1-3-1 复矢量的定义及其加减法

三维复矢量定义为以一定顺序给出的三个复数,用$\mathbf{A}=(A_x, A_y, A_z)$ 表示。

A_x 是复矢量 $\mathbf{A}$ 在 x 轴上的投影,为复数;A_y 是 $\mathbf{A}$ 在 y 轴上的投影,同样为复数;A_z 是 $\mathbf{A}$ 在 z 轴上的投影,也为复数。

两个复矢量只有在其各分量(投影)均分别相等的情况下才认为是相等的,即 $\mathbf{A}=\mathbf{B}$ 意味着

$$A_x=B_x,\quad A_y=B_y,\quad A_z=B_z \tag{1-40}$$

矢量乘以数(复数)定义为所有分量均乘以此数,即

$$\lambda\mathbf{A}=(\lambda A_x,\lambda A_y,\lambda A_z) \tag{1-41}$$

λ 为一复数，在特殊情况下可以是实数。

x 轴上的单位矢量定义为 $\mathbf{i}=(1,0,0)$； y 轴上的单位矢量定义为 $\mathbf{j}=(0,1,0)$； z 轴上的单位矢量定义为 $\mathbf{k}=(0,0,1)$。

两矢量之和定义为以各分量之和为分量的矢量，即

$$\mathbf{A}+\mathbf{B}=(A_x+B_x,A_y+B_y,A_z+B_z) \tag{1-42}$$

两矢量之差定义为以各分量之差为分量的矢量，即

$$\mathbf{A}-\mathbf{B}=(A_x-B_x,A_y-B_y,A_z-B_z) \tag{1-43}$$

根据数乘、矢量和及矢量差定义直接可以写出：

$$\mathbf{A}=\mathbf{i}A_x+\mathbf{j}A_y+\mathbf{k}A_z$$

$$\mathbf{A}+\mathbf{B}=\mathbf{i}(A_x+B_x)+\mathbf{j}(A_y+B_y)+\mathbf{k}(A_z+B_z)$$

$$\mathbf{A}-\mathbf{B}=\mathbf{i}(A_x-B_x)+\mathbf{j}(A_y-B_y)+\mathbf{k}(A_z-B_z)$$

根据加法和数乘定义立即可得出它们的下列性质：

$$\begin{cases}\mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{C})=(\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C} & \text{(结合律)}\\ \mathbf{A}+\mathbf{B}=\mathbf{B}+\mathbf{A} & \text{(交换律)}\\ (\lambda_1+\lambda_2)\mathbf{A}=\lambda_1\mathbf{A}+\lambda_2\mathbf{A} & \\ \lambda(\mathbf{A}+\mathbf{B})=\lambda\mathbf{A}+\lambda\mathbf{B} & \text{(分配律)}\\ \lambda_1(\lambda_2\mathbf{A})=\lambda_1\lambda_2\mathbf{A} & \end{cases} \tag{1-44}$$

另外，由 $\mathbf{A}+\mathbf{B}=\mathbf{C}$ 可得 $\mathbf{A}=\mathbf{C}-\mathbf{B}$, $\mathbf{B}=\mathbf{C}-\mathbf{A}$。由 $\mathbf{A}-\mathbf{B}=\mathbf{C}$ 可得 $\mathbf{A}=\mathbf{B}+\mathbf{C}$。

1-3-2 复矢量的标量积（点积）

两复矢量的标量积，即点积定义为

$$\begin{aligned}\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}&=A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z\\ &=A_xB_x+B_yA_y+B_zA_z\\ &=\cdots\end{aligned} \tag{1-45}$$

由此定义可得

(1) $\mathbf{i}\cdot\mathbf{i}=1$, $\mathbf{j}\cdot\mathbf{i}=0$, $\mathbf{k}\cdot\mathbf{i}=0$

$\mathbf{i}\cdot\mathbf{j}=0$, $\mathbf{j}\cdot\mathbf{j}=1$, $\mathbf{k}\cdot\mathbf{j}=0$

$\mathbf{i}\cdot\mathbf{k}=0$, $\mathbf{j}\cdot\mathbf{k}=0$, $\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}=1$

(2) $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}$

$\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}+\mathbf{C})=\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}+\mathbf{A}\cdot\mathbf{C}$

(3) $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$ 的表达式可通过下列点积运算得出:

$$\begin{aligned}\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}&=(\mathbf{i}A_x+\mathbf{j}A_y+\mathbf{k}A_z)\cdot(\mathbf{i}B_x+\mathbf{j}B_y+\mathbf{k}B_z)\\&=(\mathbf{i}\cdot\mathbf{i})A_xB_x+(\mathbf{j}\cdot\mathbf{j})A_yB_y+(\mathbf{k}\cdot\mathbf{k})A_zB_z\\&\quad+\text{等于零的项}\qquad(\mathbf{i}\cdot\mathbf{j}\text{ 等为零})\\&=A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z\end{aligned}\tag{1-46}$$

注意,在复矢量情况下,$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$ 没有 $\mathbf{A}$ 在 $\mathbf{B}$ 上的分量(投影)这样的几何意义,$\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}=\mathbf{A}^2$ 也没有几何意义,不过它们和实矢量情况相同的地方是,用坐标分量表示的表达式形式上是一样的。因此,在进行具体计算的时候,从形式上来看,复矢量和实矢量的情况没有任何差别。

1-3-3 复矢量的矢量积(叉积)

$\mathbf{A}=\mathbf{i}A_x+\mathbf{j}A_y+\mathbf{k}A_z$ 和 $\mathbf{B}=\mathbf{i}B_x+\mathbf{j}B_y+\mathbf{k}B_z$ 这两个复矢量的矢量积(叉积) $\mathbf{A}\times\mathbf{B}$ 定义为

$$\begin{aligned}\mathbf{A}\times\mathbf{B}&=\mathbf{i}(A_yB_z-A_zB_y)+\mathbf{j}(A_zB_x-A_xB_z)\\&\quad+\mathbf{k}(A_xB_y-A_yB_x)\end{aligned}$$

或

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B}=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\A_x&A_y&A_z\\B_x&B_y&B_z\end{vmatrix}$$

(注意,对复矢量来说,$\mathbf{A}\times\mathbf{B}$ 没有几何意义。)由此定义立即可得

(1) $\mathbf{A}\times\mathbf{A}=0$

(2) $\mathbf{B}\times\mathbf{A}=-\mathbf{A}\times\mathbf{B}$

(3) $\mathbf{A}\times(\mathbf{B}+\mathbf{C})=\mathbf{A}\times\mathbf{B}+\mathbf{A}\times\mathbf{C}$

(4) $\lambda(\mathbf{A}\times\mathbf{B})=\lambda\mathbf{A}\times\mathbf{B}=\mathbf{A}\times\lambda\mathbf{B}$

(5) $\mathbf{i}\times\mathbf{i}=0,\ \mathbf{j}\times\mathbf{i}=-\mathbf{k},\ \mathbf{k}\times\mathbf{i}=\mathbf{j}$

$\mathbf{i}\times\mathbf{j}=\mathbf{k},\ \mathbf{j}\times\mathbf{j}=0,\ \mathbf{k}\times\mathbf{j}=-\mathbf{i}$

$$\mathbf{i}\times\mathbf{k}=-\mathbf{j},\ \mathbf{j}\times\mathbf{k}=\mathbf{i},\ \mathbf{k}\times\mathbf{k}=0$$

(6) $$\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})=\begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix} \tag{1-47}$$

因为展开行列式后得

$$A_xB_yC_z+A_yB_zC_x+A_zB_xC_y-A_zB_yC_x\\-A_yB_xC_z-A_xB_zC_y$$

而

$$\mathbf{B}\times\mathbf{C}=\mathbf{i}(B_yC_z-B_zC_y)+\mathbf{j}(B_zC_x-B_xC_z)\\+\mathbf{k}(B_xC_y-B_yC_x)$$

$$\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})=A_xB_yC_z-A_xB_zC_y+A_yB_zC_x\\-A_yB_xC_z+A_zB_xC_y-A_zB_yC_x$$

与行列式相同. 由此可得

$$\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})=\mathbf{B}\cdot(\mathbf{C}\times\mathbf{A})=\mathbf{C}\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B})=\cdots$$

(7) $$\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C})=\mathbf{B}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C})-\mathbf{C}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) \tag{1-48}$$

证法同上.

1-3-4 结论

实矢量代数中的所有运算公式在复矢量情况下都成立. 但对复矢量来说,下列各量没有几何意义:

(1) $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$;

(2) $\mathbf{A}\times\mathbf{B}$;

(3) $\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}$;

(4) $\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})$.

另外,下面的两个公式不成立:

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=|\mathbf{A}|\cdot|\mathbf{B}|\cos(\mathbf{A}\hat{\ }\mathbf{B})$$

$$|\mathbf{A}\times\mathbf{B}|=|\mathbf{A}|\cdot|\mathbf{B}|\sin(\mathbf{A}\hat{\ }\mathbf{B})$$

式中, $\mathbf{A}\hat{\ }\mathbf{B}$ 表示矢量 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 之间的夹角. 在复矢量情况下, $\mathbf{A}\hat{\ }\mathbf{B}$ 没有意义, 因此以上两个公式也不成立.

第二章 矢量分析

2-1 场的概念——标量场与矢量场

在物理学中，“场”这个名词通常用来表示某种物理现象的一部分空间或整个空间。例如，空间不同点上的温度构成温度场，大气压力构成压力场。电荷在它的周围形成静电场：在场内某一点上如果置有电荷，那它就受到大小和方向完全确定的力的作用（库仑定律）。还可以举出许多类似的例子。

若物理现象可以用某一数量（标量）来表征，则场就称为标量场。如果所研究的物理现象需要用某个矢量来表征，例如上述静电场情况，那末场就称为矢量场。由于矢量总可被看成是一种力，因此矢量场有时也称为力场。当然，这仅仅是一种便于想象的表述方式。

将以上所举的例子从数学角度加以抽象，我们就能获得数学上的场的概念。可以用以下方式定义场的数学概念：假设在空间的某个区域给定了一个标量函数 f，$f=f(P)$（P 表示空间 V 中的任意点），我们就说在 V 中给定了标量场。函数 $f=f(P)$ 总假定是单值并只取有限的实数值。在多数情况下还假定具有连续的一阶、二阶导数。类似地，如在空间 V 内的每一点 P 上都有一个矢量与之相对应，那末就说在 V 内给定了矢量场。

由上可见，标量场概念和点的函数概念没有差别。若 V 是三维空间的某个区域（通常所碰到的正是这种情况），则标量场 f 就是三个变量 x,y,z（点 P 的坐标）的函数：

$$f=f(x,y,z)$$

f 也可以看成是矢量自变量 $\mathbf{r}$（P 的矢量半径）的函数

$$f=f(\mathbf{r})$$

这里 $\boldsymbol{r}$ 表示从坐标系原点到 P 点的矢量.

需要指出的是,表征标量场的量 f 还可以与时间有关. 例如,同一组点上的温度在一天的不同时刻可以是不一样的. 但在本章中我们只考虑与时间无关的场. 这样的场称为稳态场. 与上面的情况完全类似,确定矢量场的矢量 $\mathbf{f}$, 可以看成是三个标量自变量 x,y,z 的矢量函数,或者是 P 点的矢量半径 $\mathbf{r}$ 的矢量函数. 下面我们也只考虑与时间无关的稳态矢量场:

$$\mathbf{f}=\mathbf{f}(x,y,z)=\mathbf{f}(\mathbf{r})$$

现在我们来举几个标量场的例子. 静电场的位函数由下式表述:

$$\varphi=\frac{e}{4\pi\varepsilon_0 r} \tag{2-1}$$

式中, e 为电荷(库仑), ε_0 为真空介电常数,等于 $8.854\times10^{-12}\mathrm{F/m}$, $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ 为处于坐标系原点的电荷至观察点的距离. 除了坐标系的原点外,在那里 $r=0$, $\varphi=\infty$, 位函数式(2-1)在全空间确定一个标量场.

函数 $u=\sqrt{R^2-x^2-y^2-z^2}$ (R 为常数) 只在 $x^2+y^2+z^2\leqslant R^2$ 时才取实数值. 因此,对于给定的情况,场只在以原点为球心、以 R 为半径的球面内部才有定值. 球面的方程是

$$x^2+y^2+z^2=R^2$$

对球外的点, u 不能表示场的值. 如果有场存在,那末需要用另外的公式来表述.

对于场函数 $u=\arcsin\left(\frac{z}{x^2+y^2}\right)$, 为使它有意义, 必须满足下列条件

$$\left|\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|\leqslant 1$$

或满足与其等效的条件 $z^2\leqslant x^2+y^2$, 因为 $\sin u$ 必须小于或等于 1. 坐标满足上列条件的点是处于直圆锥表面上或外部的点. 直圆锥的方程是

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0$$

u 不能用来表示直圆锥内部点上的场值。

函数 $\dfrac{1}{Ax + By + Cz + D}$ 在全空间内确定一个标量场，但平面 $Ax + By + Cz + D = 0$ 上的点需除外，因为在这些点上分母等于零，场函数的值变为无穷大。

2-2 场矢量的导数

假设给定了某一矢量的场函数

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}(x, y, z)$$

式中 x, y, z 为场点 P 的直角坐标。令 $\mathbf{f}$ 在坐标轴上的投影分别为 f_x, f_y, f_z，它们当然也是场点的函数，即

$$f_x = f_x(x, y, z)$$

$$f_y = f_y(x, y, z)$$

$$f_z = f_z(x, y, z)$$

由矢量代数我们知道，$\mathbf{f}$ 可以表示为它的三个矢量分量之和，即

$$\mathbf{f}(x, y, z) = \mathbf{i}f_x(x, y, z) + \mathbf{j}f_y(x, y, z) + \mathbf{k}f_z(x, y, z) \tag{2-2}$$

由此可见，给出矢量场函数等效于给出三个标量场函数。

和微积分学一样，可以引入矢量函数的偏导数和全微分概念。

我们以对 x 的偏导数为例进行研究。对其他变量的偏导数可以用同样方法处理。

考虑一个矢量场函数 $\mathbf{f} = \mathbf{f}(P) = \mathbf{f}(x, y, z)$，并选择空间任一固定的点 P，其坐标为 x, y, z。对应于 x, y, z 的矢量为

$$\mathbf{f}(x, y, z) = \mathbf{i}f_x(x, y, z) + \mathbf{j}f_y(x, y, z) + \mathbf{k}f_z(x, y, z)$$

现使 y, z 固定不变，而只赋予 x 一增量 Δx，这样我们就得到另一矢量

$$\mathbf{f}(x + \Delta x, y, z) = \mathbf{i}f_x(x + \Delta x, y, z) + \mathbf{j}f_y(x + \Delta x, y, z)$$

$$+\mathbf{k}f_z(x+\Delta x,y,z)$$

由此可得因 x 的增量 Δx 而引起的矢量的增量为

$$\begin{aligned}\Delta\mathbf{f} &= \mathbf{f}(x+\Delta x,y,z)-\mathbf{f}(x,y,z)\\ &= \mathbf{i}\Delta f_x+\mathbf{j}\Delta f_y+\mathbf{k}\Delta f_z \end{aligned} \tag{2-3}$$

式中

$$\Delta f_x = f_x(x+\Delta x,y,z)-f_x(x,y,z)$$
$$\Delta f_y = f_y(x+\Delta x,y,z)-f_y(x,y,z)$$
$$\Delta f_z = f_z(x+\Delta x,y,z)-f_z(x,y,z)$$

将等式(2-3)两边除以 Δx，并取 $\Delta x\to 0$ 时的极限。这个极限值存在的话，就称为 $\mathbf{f}$ 对 x 的偏导数。由式(2-3)可写出

$$\frac{\Delta\mathbf{f}}{\Delta x}=\mathbf{i}\frac{\Delta f_x}{\Delta x}+\mathbf{j}\frac{\Delta f_y}{\Delta x}+\mathbf{k}\frac{\Delta f_z}{\Delta x}$$

于是

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta\mathbf{f}}{\Delta x}=\mathbf{i}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f_x}{\Delta x}+\mathbf{j}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f_y}{\Delta x}$$
$$+\mathbf{k}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f_z}{\Delta x}$$

但

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f_x}{\Delta x}=\frac{\partial f_x}{\partial x},\quad \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f_y}{\Delta x}=\frac{\partial f_y}{\partial x},\quad \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f_z}{\Delta x}=\frac{\partial f_z}{\partial x}$$

故

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta\mathbf{f}}{\Delta x}=\mathbf{i}\frac{\partial f_x}{\partial x}+\mathbf{j}\frac{\partial f_y}{\partial x}+\mathbf{k}\frac{\partial f_z}{\partial x}$$

和微积分学一样，$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta\mathbf{f}}{\Delta x}$ 用 $\dfrac{\partial\mathbf{f}}{\partial x}$ 表示。最后得

$$\frac{\partial\mathbf{f}}{\partial x}=\mathbf{i}\frac{\partial f_x}{\partial x}+\mathbf{j}\frac{\partial f_y}{\partial x}+\mathbf{k}\frac{\partial f_z}{\partial x} \tag{2-4}$$

用同样的方式，得：

$$\frac{\partial\mathbf{f}}{\partial y}=\mathbf{i}\frac{\partial f_x}{\partial y}+\mathbf{j}\frac{\partial f_y}{\partial y}+\mathbf{k}\frac{\partial f_z}{\partial y} \tag{2-5}$$

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x}=\mathbf{i}\frac{\partial f_x}{\partial x}+\mathbf{j}\frac{\partial f_y}{\partial x}+\mathbf{k}\frac{\partial f_z}{\partial x} \tag{2-6}$$

全微分定义为

$$d\mathbf{f}=\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x}dx+\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial y}dy+\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial z}dz \tag{2-7}$$

由式(2-4),(2-5)和(2-6)得

$$d\mathbf{f}=\mathbf{i}df_x+\mathbf{j}df_y+\mathbf{k}df_z \tag{2-8}$$

下面来证明几条求导数的规则.

1. 几个矢量函数之和的导数等于各个矢量函数的导数之和.

$$\frac{\partial(\mathbf{f}_1+\mathbf{f}_2)}{\partial x}=\frac{\partial \mathbf{f}_1}{\partial x}+\frac{\partial \mathbf{f}_2}{\partial x} \tag{2-9}$$

用式(2-4)可立即证明这条规则.

2. 如果矢量函数 $\mathbf{f}$ 乘以一个标量函数 a, 则

$$\frac{\partial a\mathbf{f}}{\partial x}=a\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x}+\frac{\partial a}{\partial x}\mathbf{f} \tag{2-10}$$

这条规则也可用式(2-4)来证明.

3.

$$\frac{\partial(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})}{\partial x}=\mathbf{a}\cdot\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial x}+\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial x}\cdot\mathbf{b} \tag{2-11}$$

证明如下:

$$\begin{aligned}\Delta(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})&=(\mathbf{a}+\Delta\mathbf{a})\cdot(\mathbf{b}+\Delta\mathbf{b})-\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\\&=\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}+\mathbf{a}\cdot\Delta\mathbf{b}+\Delta\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\\&\quad+\Delta\mathbf{a}\cdot\Delta\mathbf{b}-\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\\&=\mathbf{a}\cdot\Delta\mathbf{b}+\Delta\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}+\Delta\mathbf{a}\cdot\Delta\mathbf{b}\end{aligned}$$

由此可得

$$\frac{\Delta(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})}{\Delta x}=\mathbf{a}\cdot\frac{\Delta\mathbf{b}}{\Delta x}+\frac{\Delta\mathbf{a}}{\Delta x}\cdot\mathbf{b}+\Delta\mathbf{a}\cdot\frac{\Delta\mathbf{b}}{\Delta x}$$

取 $\Delta x\to 0$ 时的极限，有

$$\frac{\partial(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0}\left(\mathbf{a} \cdot \frac{\Delta \mathbf{b}}{\Delta x}\right) + \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\Delta \mathbf{a}}{\Delta x} \cdot \mathbf{b}\right)$$

$$+ \lim_{\Delta x \to 0}\left(\Delta \mathbf{a} \cdot \frac{\Delta \mathbf{b}}{\Delta x}\right)$$

$$= \mathbf{a} \cdot \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial x} \cdot \mathbf{b} + 0 \cdot \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial x}$$

$$= \mathbf{a} \cdot \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial x} \cdot \mathbf{b}$$

4. $$\frac{\partial (\mathbf{a} \times \mathbf{b})}{\partial x} = \mathbf{a} \times \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial x} \times \mathbf{b} \qquad (2\text{-}11a)$$

证明同 3. 这里要注意一点，就是 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 的先后顺序不可颠倒，因为 $\mathbf{a} \times \mathbf{b} \neq \mathbf{b} \times \mathbf{a}$.

我们还要特别指出，$\frac{\partial(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial (\mathbf{a} \times \mathbf{b})}{\partial x}$ 都是数学上有确定含意的量. 如果碰到下面这样的表达式:

$$\mathbf{a} \frac{\partial}{\partial x} \cdot \mathbf{b}$$

那就不知道它的含义究竟是什么了，原因在于数学上对符号组合 $\frac{\partial}{\partial x}\cdot$ 并没有规定什么意义，我们当然也就不能随意解释了. 要使其有意义，必须专门加以定义才行.

下面来考虑一种特殊情况.

假定 $\mathbf{f} = \mathbf{r} = \mathbf{i}x + \mathbf{j}y + \mathbf{k}z$, 则

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} = \mathbf{i}, \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} = \mathbf{j}, \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} = \mathbf{k}$$

$$d\mathbf{r} = \mathbf{i}dx + \mathbf{j}dy + \mathbf{k}dz \qquad (2\text{-}12)$$

$$|d\mathbf{r}|^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = ds^2 \qquad (2\text{-}13)$$

式中，ds 为连接 $(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$ 和 (x, y, z) 两点的直线线段.

2-3 场矢量的积分

和标量函数的积分相类似,矢量函数的定积分可分为线积分、面积分和体积分三种。下面我们将分别列举这三种积分的定义。在以后各章中的不同情况下将分别用到这里所列举的各种积分。

2-3-1 矢量函数的线积分及其分类

设在空间有一曲线 l,它可以是封闭的,也可以是非封闭的,如图 2-1 所示。曲线的两个端点用 A 和 B 表示。在封闭曲线情况下,A 和 B 重合并可以是曲线上的任一点。我们规定在曲线上移动的正方向为从 A 到 B。沿封闭曲线可以有两种移动方向,那一种为正方向,需根据情况作具体的规定。

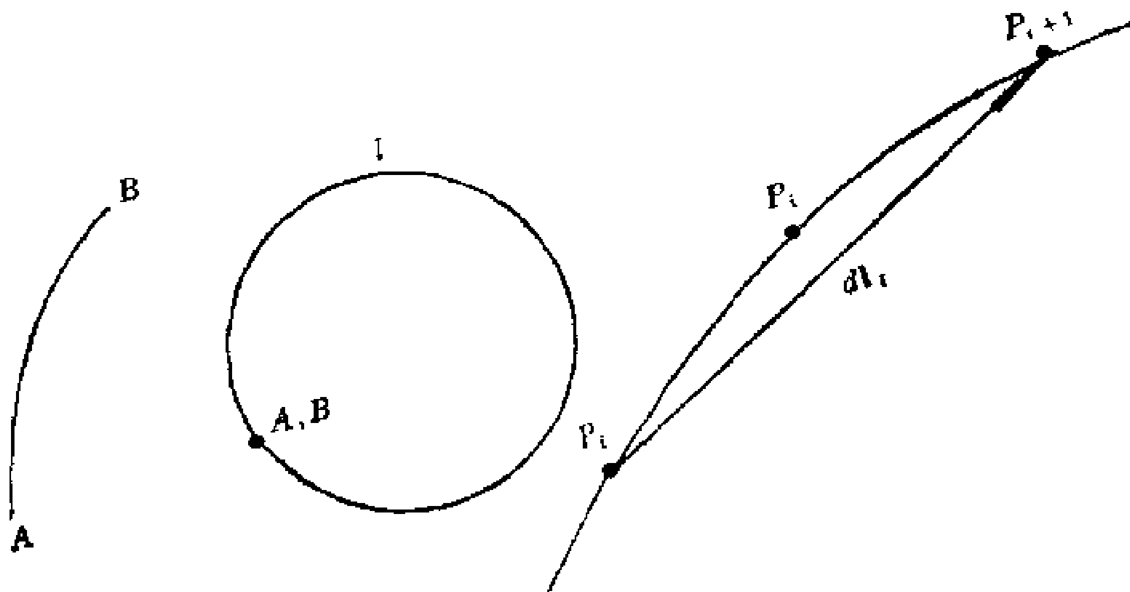


图 2-1 空间的曲线 l　　　　图 2-2 线元 $d\mathbf{l}_i$, $dl_i = |d\mathbf{l}_i|$

与微积分学相类似,我们可以将曲线 AB 分成 n 个小线段,其分点用 i 表示,$i = 1, 2, \cdots, n$。考虑相邻两分点 i 和 $i+1$。连接 i 点和 $i+1$ 点的线段 $P_{i,i+1}$ 其大小用 dl_i 表示。矢量 $\mathbf{P}_{i,i+1}$ 用 $d\mathbf{l}_i$ 表示,见图 2-2。

可以定义下列五种线积分:

(1) $\int_l f dl = \lim_{\substack{dl_i \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{i=1}^{n} f(P_i')dl_i$ (2-14)

(2) $\int_l \mathbf{f} dl = \lim_{\substack{dl_i \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{i=1}^{n} \mathbf{f}(P_i')dl_i$ (2-15)

(3) $\int_l f d\mathbf{l} = \lim_{\substack{dl_i \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{i=1}^{n} f(P_i')d\mathbf{l}_i$ (2-16)

(4) $\int_l \mathbf{f} \cdot d\mathbf{l} = \lim_{\substack{dl_i \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{i=1}^{n} \mathbf{f}(P_i') \cdot d\mathbf{l}_i$ (2-17)

(5) $\int_l \mathbf{f} \times d\mathbf{l} = \lim_{\substack{dl_i \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{i=1}^{n} \mathbf{f}(P_i') \times d\mathbf{l}_i$ (2-18)

P_i' 为 P_iP_{i+1} 中的任意一点。

2-3-2 矢量函数的面积分及其分类

矢量函数面积分的定义与线积分很相似。差别主要在于线元变成了面元，矢量线元变成了矢量面元，而求和的过程是完全一样的。设在空间有一曲面 S，它可以是封闭的，也可以是非封闭的，如图 2-3 所示。

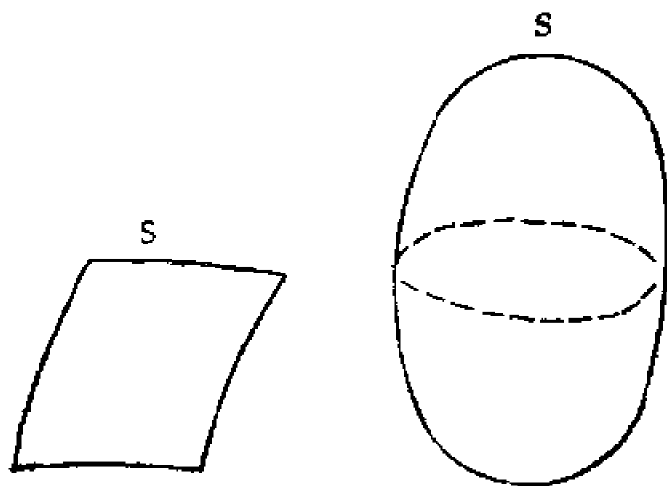


图 2-3 空间的曲面 S

将曲面 S 分成 n 个小块，其中第 i 个小块的面积用 dS_i 表示，$i=1,2,\cdots,n$。在第 i 个小块上任取一点 P_i 并在此点作小块的

单位法矢量，如图 2-4 所示。P_i 点的单位法矢量可以有两个方向，例如就封闭曲面而言，$\mathbf{n}_i$ 既可以指向曲面外部的空间，也可以指向曲面内部的空部；对于非封闭曲面来说，相对于观察者所处的位置，$\mathbf{n}_i$ 可以朝"上"或朝"下"。因此，对每种具体情况要明确地标明单位法矢量的指向。设在第 i 个小块上已选定了单位法矢量的指向，即明确了 $\mathbf{n}_i$ 意味着什么，$\mathbf{n}_i dS_i$ 就称为矢量面积元，用 $d\mathbf{S}_i$ 表示，而 dS_i 则简单地称为面积元。于是我们可以定义下列五种面积分：

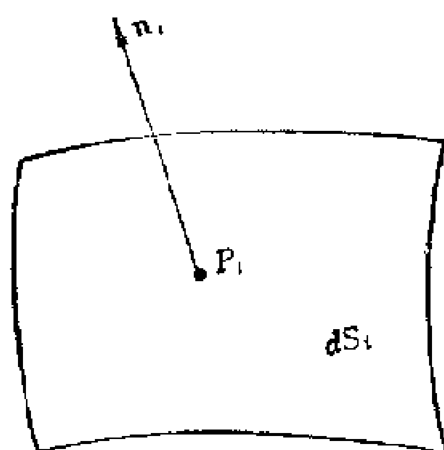


图 2-4 面积元 dS_i 和矢量面积元 $\mathbf{n}_i dS_i$

$$(1)\quad \iint_S F(P)dS = \lim_{\substack{dS_i\to 0\\ n\to\infty}} \sum_{i=1}^{n} F(P_i)dS_i \tag{2-19}$$

$$(2)\quad \iint_S \mathbf{F}(P)dS = \lim_{\substack{dS_i\to 0\\ n\to\infty}} \sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}(P_i)dS_i \tag{2-20}$$

$$(3)\quad \iint_S F(P)d\mathbf{S} = \lim_{\substack{dS_i\to 0\\ n\to\infty}} \sum_{i=1}^{n} F(P_i)d\mathbf{S}_i \tag{2-21}$$

$$(4)\quad \iint_S \mathbf{F}(P)d\mathbf{S} = \lim_{\substack{dS_i\to 0\\ n\to\infty}} \sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}(P_i)\cdot d\mathbf{S}_i \tag{2-22}$$

$$(5)\quad \iint_S \mathbf{F}(P)\times d\mathbf{S} = \lim_{\substack{dS_i\to 0\\ n\to\infty}} \sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}(P_i)\times d\mathbf{S}_i \tag{2-23}$$

2-3-3 矢量函数的体积分及其分类

与面积分的情况相类似，设在空间有一区域 V，它可以是有限、无限或全空间的。把 V 分成 n 个小体积元，其体积用 dV_i 表示，$i=1,2,\cdots,n$。在第 i 个小体积中任选一点 P_i（图 2-5 所示），于是，可以定义下列两种体积分：

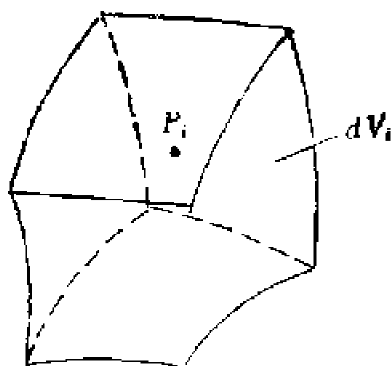


图 2-5 体积元 dV_i

(1) $$\iiint_V F(P)dV = \lim_{\substack{dV_i\to 0\\ n\to\infty}} \sum_{i=1}^{n} F(P_i)dV_i \tag{2-24}$$

(2) $$\iiint_V \mathbf{F}(P)dV = \lim_{\substack{dV_i\to 0\\ n\to\infty}} \sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}(P_i)dV_i \tag{2-25}$$

2-4 几个有用的数学公式

这一节中我们将证明几个在矢量分析方面经常要用到的重要数学公式.

设在空间给定了标量函数 f 或矢量函数 $\mathbf{f}$. 在空间取一固定点 P, 再取一包含 P 的小体积 V (P 可以在 V 的边界上). 令包围 V 的封闭曲面为 S, 如图 2-6 所示. 我们来证明: 在直角坐标系 x, y, z 中, 下面几个极限值存在并等于等式右边的值. 它们的重要性在于: 等式左边是与坐标系无关的量, 从而等式右边虽然在形式上是坐标变量的函数, 但其值与具体选那一种坐标无关. 换句话说, 右边的量并不因坐标系的改变而变动, 这是一种不变量.

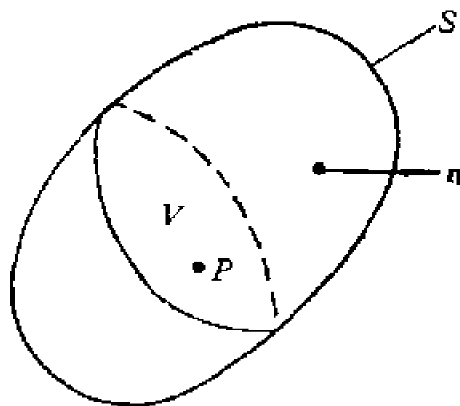


图 2-6 P, V, S 的含意

(1) $$\lim_{V\to P}\frac{\int_S \mathbf{n}f\,dS}{V}=\mathbf{i}\frac{\partial f}{\partial x}+\mathbf{j}\frac{\partial f}{\partial y}+\mathbf{k}\frac{\partial f}{\partial z} \tag{2-26}$$

(2) $$\lim_{V\to P}\frac{\int_S \mathbf{n}\cdot\mathbf{f}\,dS}{V}=\frac{\partial f_x}{\partial x}+\frac{\partial f_y}{\partial y}+\frac{\partial f_z}{\partial z} \tag{2-27}$$

(3) $$\lim_{V\to P}\frac{\int_S \mathbf{n}\times\mathbf{f}\,dS}{V}=\mathbf{i}\left(\frac{\partial f_z}{\partial y}-\frac{\partial f_y}{\partial z}\right)+\mathbf{j}\left(\frac{\partial f_x}{\partial z}-\frac{\partial f_z}{\partial x}\right)+\mathbf{k}\left(\frac{\partial f_y}{\partial x}-\frac{\partial f_x}{\partial y}\right) \tag{2-28}$$

式中，$V\to P$ 意味着 V 向 P 点收缩，并取最后收缩成 P 点时的极限。与此相应，封闭曲面 S 也向 P 点收缩，最后以 P 点为极限。f_x, f_y, f_z 为 $\mathbf{f}$ 分别在 x, y, z 轴上的分量：

$$\mathbf{f}=\mathbf{i}f_x+\mathbf{j}f_y+\mathbf{k}f_z$$

这三个等式可以用统一的方式来证明。我们看到，它们之间的差别仅仅是被积函数的形式不同，即分别为 $\mathbf{n}f, \mathbf{n}\cdot\mathbf{f}$ 和 $\mathbf{n}\times\mathbf{f}$，

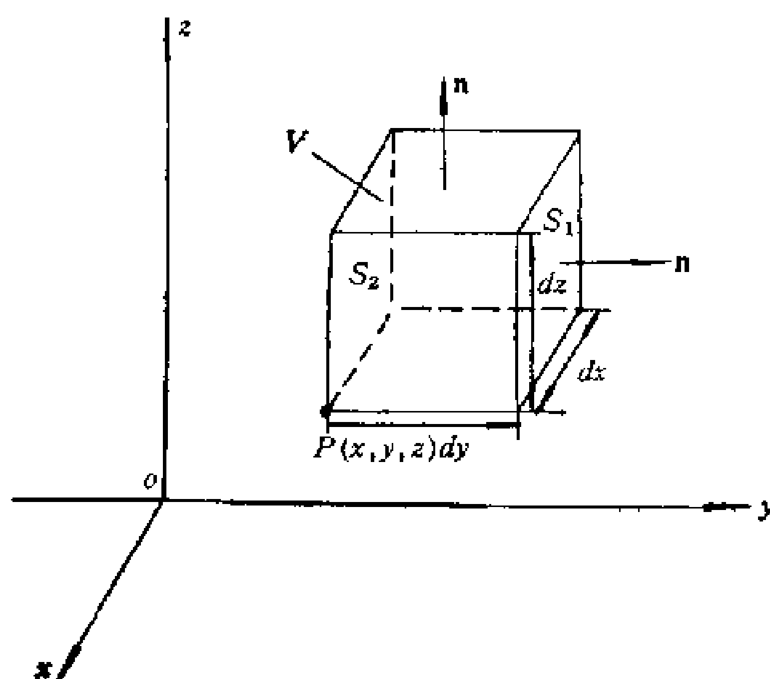


图 2-7 直角坐标系及矩形的小体积 V

其中 $\mathbf{n}$ 为在小面积元 dS 上朝向封闭曲面 S 外部的单位法矢量。我们以一个通用符号 $T(\mathbf{n})$ 来表示它们，即 $T(\mathbf{n})$ 可以等于 $\mathbf{n}f, \mathbf{n}\cdot\mathbf{f}$ 或 $\mathbf{n}\times\mathbf{f}$。

在空间任取一直角坐标系 x，y，z，并设 P 点的坐标为 (x, y, z)，又取 V 为一矩形，P 为其顶点，各边长分别为 dx, dy, dz，如图 2-7 所示。

在目前的情况下 S 分成六片，其中两片垂直于 x 轴，其面积为 $dydz$；另外两片垂直于 y 轴，其面积为 $dzdx$；还有两片垂直于 z 轴，其面积为 $dxdy$。我们把对 S 的积分分成三组来求，最后再将结果加起来。先取垂直于 y 轴的两个面，如图 2-8 所示。

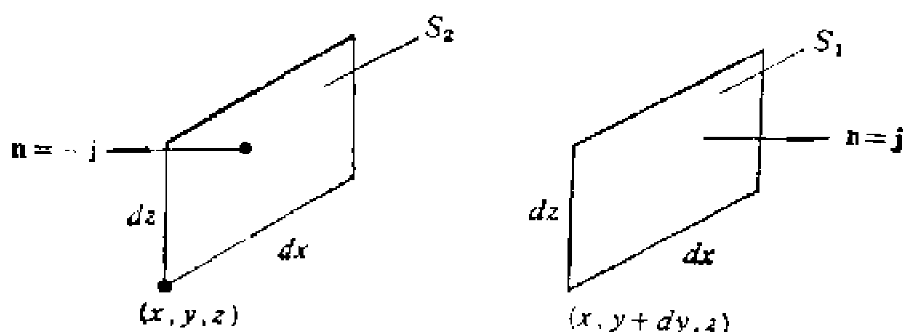


图 2-8 对垂直于 y 轴的两个平面的积分

在 S_1 上 $\mathbf{n}=\mathbf{j}$；对 S_1 的积分，根据中值定理，可以表示成 S_1 上某一点的 $T(\mathbf{n})$ 值乘以 S_1 的面积 $dzdx$，我们用

$$T(\mathbf{j})|_{y+dy}dzdx$$

来表示，式中 $T(\mathbf{j})|_{y+dy}$ 表示 $\mathbf{n}=\mathbf{j}$，y 坐标为 $y+dy$ 时的 $T(\mathbf{n})$ 值。在 S_2 上 $\mathbf{n}=-\mathbf{j}$；对 S_2 的积分，根据中值定理，可以表示成 S_2 上某一点的 $T(\mathbf{n})=T(-\mathbf{j})$ 值乘以 S_2 的面积 $dzdx$，我们用

$$-T(\mathbf{j})|_y dzdx$$

来表示。式中 $-T(\mathbf{j})|_y$ 表示 $\mathbf{n}=-\mathbf{j}, T(\mathbf{n})=T(-\mathbf{j})=-T(\mathbf{j})$，而 y 坐标为 y 时的 $T(\mathbf{n})$ 值。由此，S_1 和 S_2 上的积分之和为

$$(T(\mathbf{j})|_{y+dy}-T(\mathbf{j})|_y)dzdx$$

$$= \left(\frac{\partial T(\mathbf{j})}{\partial y} \Big|_y dy \right) dz dx + o(dydzdx)$$

式中 $o(dydzdx)$ 表示对 $dydzdx$ 更高阶的微分量。于是

$$\int_{S_1} T(\mathbf{n}) dS + \int_{S_2} T(\mathbf{n}) dS$$

$$= \frac{\partial T(\mathbf{j})}{\partial y} \Big|_y dydzdx + o(dydzdx)$$

同理，对垂直于 x 轴的两个面的积分之和为

$$\frac{\partial T(\mathbf{i})}{\partial x} \Big|_x dydzdx + o(dydzdx)$$

对垂直于 z 轴的两个面的积分之和为

$$\frac{\partial T(\mathbf{k})}{\partial z} \Big|_z dydzdx + o(dydzdx)$$

其中 $o(dydzdx)$ 表示比 $dydzdx$ 更高阶的微分量。于是

$$\lim_{V \to P} \frac{\int_S T(\mathbf{n}) dS}{V} = \lim_{\substack{dx \to 0 \\ dy \to 0 \\ dz \to 0}} \frac{\left(\frac{\partial T(\mathbf{i})}{\partial x} + \frac{\partial T(\mathbf{j})}{\partial y} + \frac{\partial T(\mathbf{k})}{\partial z} \right) dxdydz}{dxdydz}$$

$$= \frac{\partial T(\mathbf{i})}{\partial x} + \frac{\partial T(\mathbf{j})}{\partial y} + \frac{\partial T(\mathbf{k})}{\partial z}$$

这就是我们要证明的公式。

(1) 当 $T(\mathbf{n}) = \mathbf{n} f$ 时，

$$\frac{\partial T(\mathbf{i})}{\partial x} = \mathbf{i} \frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial T(\mathbf{j})}{\partial y} = \mathbf{j} \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial T(\mathbf{k})}{\partial z} = \mathbf{k} \frac{\partial f}{\partial z}$$

于是

$$\lim_{V \to P} \frac{\int_S \mathbf{n} f dS}{V} = \mathbf{i} \frac{\partial f}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial f}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial f}{\partial z}$$

(2) 当 $T(\mathbf{n}) = \mathbf{n} \cdot \mathbf{f}$ 时，

$$T(\mathbf{i}) = \mathbf{i} \cdot \mathbf{f} = f_x, \quad T(\mathbf{j}) = \mathbf{j} \cdot \mathbf{f} = f_y,$$

$$T(\mathbf{k}) = \mathbf{k} \cdot \mathbf{f} = f_z$$

$$\frac{\partial T(\mathbf{i})}{\partial x}+\frac{\partial T(\mathbf{j})}{\partial y}+\frac{\partial T(\mathbf{k})}{\partial z}=\frac{\partial f_x}{\partial x}+\frac{\partial f_y}{\partial y}+\frac{\partial f_z}{\partial z}$$

于是

$$\lim_{V\to P}\frac{\int_S \mathbf{n}\cdot\mathbf{f}dS}{V}=\frac{\partial f_x}{\partial x}+\frac{\partial f_y}{\partial y}+\frac{\partial f_z}{\partial z}$$

(3) 当 $T(\mathbf{n})=\mathbf{n}\times\mathbf{f}$ 时,

$$T(\mathbf{i})=\mathbf{i}\times\mathbf{f}=\mathbf{i}\times(\mathbf{i}f_x+\mathbf{j}f_y+\mathbf{k}f_z)$$

$$=\mathbf{k}f_y-\mathbf{j}f_z$$

$$T(\mathbf{j})=\mathbf{j}\times\mathbf{f}=-\mathbf{k}f_x+\mathbf{i}f_z$$

$$T(\mathbf{k})=\mathbf{k}\times\mathbf{f}=\mathbf{j}f_x-\mathbf{i}f_y$$

$$\frac{\partial T(\mathbf{i})}{\partial x}=\mathbf{k}\frac{\partial f_y}{\partial x}-\mathbf{j}\frac{\partial f_z}{\partial x}$$

$$\frac{\partial T(\mathbf{j})}{\partial y}=-\mathbf{k}\frac{\partial f_x}{\partial y}+\mathbf{i}\frac{\partial f_z}{\partial y}$$

$$\frac{\partial T(\mathbf{k})}{\partial z}=\mathbf{j}\frac{\partial f_x}{\partial z}-\mathbf{i}\frac{\partial f_y}{\partial z}$$

$$\frac{\partial T(\mathbf{i})}{\partial x}+\frac{\partial T(\mathbf{j})}{\partial y}+\frac{\partial T(\mathbf{k})}{\partial z}=\mathbf{i}\left(\frac{\partial f_z}{\partial y}-\frac{\partial f_y}{\partial z}\right)$$

$$+\mathbf{j}\left(\frac{\partial f_x}{\partial z}-\frac{\partial f_z}{\partial x}\right)+\mathbf{k}\left(\frac{\partial f_y}{\partial x}-\frac{\partial f_x}{\partial y}\right)$$

于是

$$\lim_{V\to P}\frac{\int_S \mathbf{n}\times\mathbf{f}dS}{V}=\mathbf{i}\left(\frac{\partial f_z}{\partial y}-\frac{\partial f_y}{\partial z}\right)+\mathbf{j}\left(\frac{\partial f_x}{\partial z}-\frac{\partial f_z}{\partial x}\right)$$

$$+\mathbf{k}\left(\frac{\partial f_y}{\partial x}-\frac{\partial f_x}{\partial y}\right)$$

这样,式(2-26),(2-27)和(2-28)全部得证.

将式(2-26)点乘一矢量函数 $\mathbf{a}$ 在 P 点的值,即点乘 $\mathbf{a}(x, y, z)$,我们得到

$$\mathbf{a}(x,y,z)\cdot\lim_{V\to P}\frac{\int_S \mathbf{n}f\,dS}{V}$$

$$=\lim_{V\to P}\mathbf{a}(x,y,z)\cdot\frac{\int_S \mathbf{n}f\,dS}{V}$$

$$=\lim_{V\to P}\frac{\int_S \mathbf{a}(x,y,z)\cdot\mathbf{n}f\,dS}{V}$$

这里 $\mathbf{a}(x,y,z)$ 在积分时是一个不变的常矢量，它始终等于 $\mathbf{a}(x,y,z)$。可是，

$$\lim_{V\to P}\frac{\int_S \mathbf{n}f\,dS}{V}=\mathbf{i}\frac{\partial f}{\partial x}+\mathbf{j}\frac{\partial f}{\partial y}+\mathbf{k}\frac{\partial f}{\partial z}$$

于是

$$\mathbf{a}(x,y,z)\cdot\lim_{V\to P}\frac{\int_S \mathbf{n}f\,dS}{V}$$

$$=\mathbf{a}(x,y,z)\cdot\left(\mathbf{i}\frac{\partial f}{\partial x}+\mathbf{j}\frac{\partial f}{\partial y}+\mathbf{k}\frac{\partial f}{\partial z}\right)$$

$$=\mathbf{a}_x(x,y,z)\frac{\partial f}{\partial x}+\mathbf{a}_y(x,y,z)\frac{\partial f}{\partial y}$$

$$+\mathbf{a}_z(x,y,z)\frac{\partial f}{\partial z}$$

最后得

$$\lim_{V\to P}\frac{\int_S [\mathbf{a}(x,y,z)\cdot\mathbf{n}]f\,dS}{V}$$

$$=\mathbf{a}_x(x,y,z)\frac{\partial f}{\partial x}+\mathbf{a}_y(x,y,z)\frac{\partial f}{\partial y}$$

$$+\mathbf{a}_z(x,y,z)\frac{\partial f}{\partial z}\qquad(2\text{-}29)$$

这里，在积分号中 $\mathbf{a}$ 始终取 (x,y,z) 点上的固定值 $\mathbf{a}(x,y,z)$。

在式(2-29)中，将 f 分别换成 f_x, f_y, f_z，并分别乘以 $\mathbf{i}_x$，$\mathbf{j}_y$，$\mathbf{k}_z$ 然后相加，我们得到

$$\lim_{V\to P}\frac{\int_S [\mathbf{a}(x,y,z)\cdot\mathbf{n}]\mathbf{f}}{V} = a_x(x,y,z)\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x} + a_y(x,y,z)\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial y} + a_z(x,y,z)\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial z} \tag{2-30}$$

和上式一样，在积分号中 $\mathbf{a}$ 始终取 (x,y,z) 点上的固定值 $\mathbf{a}(x,y,z)$。

2-5　方向导数的概念——标量场和矢量场的方向导数及其符号

在研究场的各学科中，一个很重要的问题是研究场沿不同方向的变化情况。例如，在静电场中位函数变化最大的方向就是电场的方向等等。下面我们就从数学上来研究这个问题。

设给定了一个矢量(标量)场 $\mathbf{f}(f)$。在场中我们取一个固定点 $P(x,y,z)$。通过 P 点作一曲线，使其在 P 点的切线方向为 $\hat{\mathbf{a}}$（$\hat{\mathbf{a}}$ 为单位矢量），并在曲线上沿 $\hat{\mathbf{a}}$ 方向取与 P 邻近的一点 P'，又令弧 PP' 的长短为 ΔS，如图 2-9 所示。我们定义

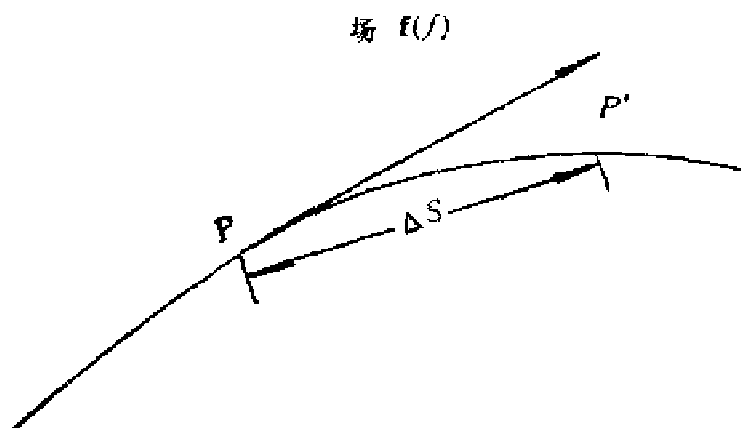


图 2-9　求方向导数时所用的符号

$$\lim_{\Delta S\to 0}\frac{\mathbf{f}(P')-\mathbf{f}(P)}{\Delta S}$$

为矢量场 $\mathbf{f}$ 在 P 点 $\hat{\mathbf{a}}$ 方向上的导数。

$\mathbf{f}(P')-\mathbf{f}(P)$ 表示矢量 $\mathbf{f}$ 从 P 点移至 P' 点后所产生的变化。ΔS 表示移动的距离，所以

$$\frac{\mathbf{f}(P')-\mathbf{f}(P)}{\Delta S}$$

表示矢量沿 $\hat{\mathbf{a}}$ 方向移动单位距离后的变化，P' 点无限接近 P 点时的这个比值的极限，正是方向导数的含意。

如弧长从 P 点算起并用 S 表示，那末 $\mathbf{f}(x, y, z)$ 将是 S 的复合函数。根据复合函数的微分规则

$$\lim_{\Delta S\to 0}\frac{\mathbf{f}(P')-\mathbf{f}(P)}{\Delta S}=\frac{\partial\mathbf{f}}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dS}+\frac{\partial\mathbf{f}}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dS}+\frac{\partial\mathbf{f}}{\partial z}\cdot\frac{dz}{dS}$$

考虑到

$$\frac{dx}{dS}=\cos(\hat{\mathbf{a}},x),\frac{dy}{dS}=\cos(\hat{\mathbf{a}},y),\frac{dz}{dS}=\cos(\hat{\mathbf{a}},z)$$

式中 $\cos(\hat{\mathbf{a}},x)$ 表示单位矢量 $\hat{\mathbf{a}}$ 与 x 轴之间夹角的余弦，即 $\hat{\mathbf{a}}$ 在

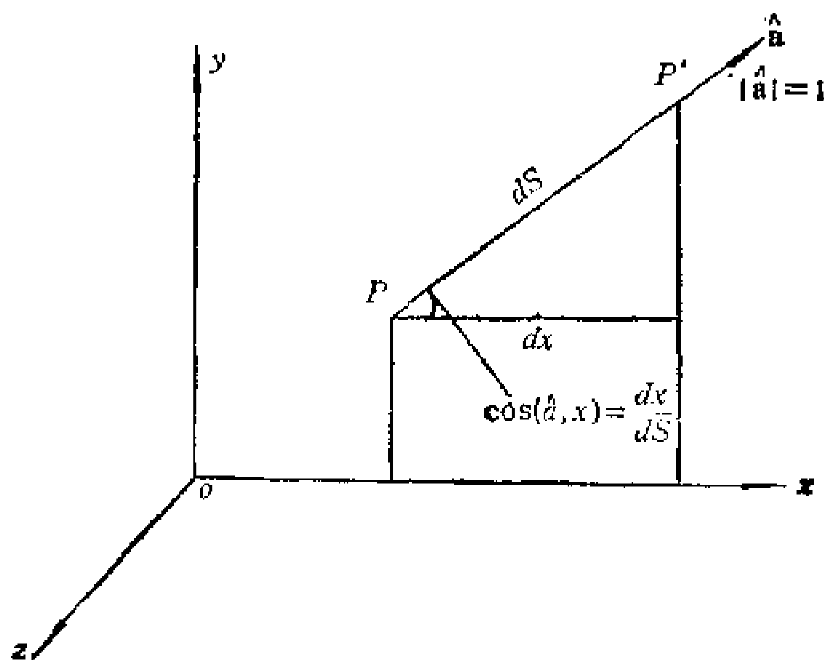


图 2-10 $\cos(\hat{\mathbf{a}},x)$ 的意义

x 轴上的投影。 $\cos(\hat{\mathbf{a}},y)$ 和 $\cos(\hat{\mathbf{a}},z)$ 的意义与此相似（图 2-10）。因此，

$$\lim_{\Delta S\to 0}\frac{\mathbf{f}(P')-\mathbf{f}(P)}{\Delta S}=\cos(\hat{\mathbf{a}},x)\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x}+\cos(\hat{\mathbf{a}},y)\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial y}+\cos(\hat{\mathbf{a}},z)\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial z} \tag{2-31}$$

若在 P 点给定的不是单位矢量 $\hat{\mathbf{a}}$，而是方向相同但有一定长度的矢量 $\mathbf{a}$（$\mathbf{a}=a\hat{\mathbf{a}}$，$a$ 为 $\mathbf{a}$ 的长度），则将式(2-31)两边乘以 a，得

$$\begin{aligned}a\lim_{\Delta S\to 0}\frac{\mathbf{f}(P')-\mathbf{f}(P)}{\Delta S}&=a\cos(\hat{\mathbf{a}},x)\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x}+a\cos(\hat{\mathbf{a}},y)\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial y}\\&\quad+a\cos(\hat{\mathbf{a}},z)\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial z}\\&=a_x\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x}+a_y\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial y}+a_z\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial z}\end{aligned} \tag{2-32}$$

式中，

$a_x=a\cos(\hat{\mathbf{a}},x)$ 为 $\mathbf{a}$ 在 x 轴上的分量；

$a_y=a\cos(\hat{\mathbf{a}},y)$ 为 $\mathbf{a}$ 在 y 轴上的分量；

$a_z=a\cos(\hat{\mathbf{a}},z)$ 为 $\mathbf{a}$ 在 z 轴上的分量。

历史上将

$$a_x\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x}+a_y\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial y}+a_z\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial z} \tag{2-33}$$

用符号 $(\mathbf{a}\cdot\nabla)\mathbf{f}$ 表示。由此可见，$(\mathbf{a}\cdot\nabla)\mathbf{f}$ 的意义是 $\mathbf{f}$ 在 $\mathbf{a}$ 方向上的方向导数乘以 $\mathbf{a}$ 的大小(幅值)。注意，$(\mathbf{a}\cdot\nabla)\mathbf{f}$ 仅仅是一个符号，这里没有点积的意义。

与此相类似，可以用同样的方法考虑标量函数 f 在 P 点沿方向 $\hat{\mathbf{a}}$ 的方向导数问题。和矢量函数 $\mathbf{f}$ 的情况完全一样，我们定义

$$\lim_{\Delta S\to 0}\frac{f(P')-f(P)}{\Delta S}$$

为标量场 f 在 P 点 $\hat{\mathbf{a}}$ 方向上的导数。

用同样的推导方法，可得

$$\lim_{\Delta S\to 0}\frac{f(P')-f(P)}{\Delta S}=\cos(\hat{\mathbf{a}},x)\frac{\partial f}{\partial x}+\cos(\hat{\mathbf{a}},y)\frac{\partial f}{\partial y}$$
$$+\cos(\hat{\mathbf{a}},z)\frac{\partial f}{\partial z} \tag{2-34}$$

及

$$a\lim_{\Delta S\to 0}\frac{f(P')-f(P)}{\Delta S}=a_x\frac{\partial f}{\partial x}+a_y\frac{\partial f}{\partial y}+a_z\frac{\partial f}{\partial z} \tag{2-35}$$

通常 $a_x\frac{\partial f}{\partial x}+a_y\frac{\partial f}{\partial y}+a_z\frac{\partial f}{\partial z}$ 用符号 $(\mathbf{a}\cdot\nabla)f$ 表示．由式(2-32) 可见，$(\mathbf{a}\cdot\nabla)f$ 的意义是 f 在 $\mathbf{a}$ 方向上的方向导数乘以 $\mathbf{a}$ 的大小(幅值)．注意：$(\mathbf{a}\cdot\nabla)f$ 也仅仅是一个符号，没有点积的意义．

由式(2-29)和(2-30)可见，

$$(\mathbf{a}\cdot\nabla)f=\lim_{V\to P}\frac{\int_S(\mathbf{a}(x,y,z)\cdot\mathbf{n})f dS}{V} \tag{2-36}$$

$$(\mathbf{a}\cdot\nabla)\mathbf{f}=\lim_{V\to P}\frac{\int_S(\mathbf{a}(x,y,z)\cdot\mathbf{n})\mathbf{f} dS}{V} \tag{2-37}$$

由式(2-36)和(2-37)可见，$(\mathbf{a}\cdot\nabla)f$ 和 $(\mathbf{a}\cdot\nabla)\mathbf{f}$ 都是与坐标系无关的量，因为式(2-36)和(2-37)右边都是和具体坐标系无关的量．因此，不论取哪一个直角坐标系，在这个系统中$(\mathbf{a}\cdot\nabla)\mathbf{f}$和$(\mathbf{a}\cdot\nabla)f$ 的表达形式都是一样的，如式(2-33)和(2-35)右边所示．

2-6 标量场的等值面和梯度的概念

大家知道，力学中的位势，静电学中的电位，都是标量场的例子．因此，从数学上来研究标量场有重要的应用价值．在这一节中，我们来研究标量场的两个重要特征量：等值面和梯度，同时还将研究梯度的性质，以便在工程中对标量场的研究提供数学基

础。

现在考虑一个由函数 $f = f(x,y,z)$ 给出的标量场。函数 f 假定是 x,y,z 的单值连续函数，并具有连续的一阶偏导数。

我们来确定 f 为等值的点，即 $f(x,y,z)$ 等于同一个值 C 的点：

$$f(x,y,z) = C \quad (C = 常数) \tag{2-38}$$

从数学上来看，这是空间中某个曲面的方程。在方程中给定 C 的不同数值 $C_1, C_2, C_3, \cdots, C_n$ 后，我们就得到了一系列曲面，在每个曲面上 f 都等于某一定值。这些曲面称为标量场的等值面。例如力学中的等势面，静电学中的等位面等等，都是等值面的具体例子。数学上有时也把等值面称为等位面，而不管其中的位具体指的是什么。

通过每个点 $P(x_0,y_0,z_0)$ 有一等值面，它的方程可用以下方式来确定。由于 P 点处于等值面上，因此其坐标必须满足这个面的方程，即

$$f(x_0,y_0,z_0) = C$$

这样就确定了 C 的数值。由此通过 $P(x_0,y_0,z_0)$ 的等值面方程是

$$f(x,y,z) = f(x_0,y_0,z_0) \tag{2-39}$$

由于 $f(x,y,z)$ 是单值函数，因此每个场点只对应于一个函数值，所以通过每个场点只有一个等值面。

下面我们来举几个等值面的例子，

假定标量场由下列函数给定：

$$f = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2 - z^2}$$

式中 R 为常数，则等值面将是一系列同心球面

$$\sqrt{R^2 - x^2 - y^2 - z^2} = C$$

或

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2 - C^2$$

这是球面方程。不同的 C 对应于不同的球面半径 $\sqrt{R^2 - C^2}$。当 $C = 0$ 时，得

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

这是场值为零的等值面。当 $C=R$ 时，得

$$x^2+y^2+z^2=0$$

这是坐标原点，即对应于场值为 R 的等值面缩成一点。当 $C>R$ 时，物理上不存在等值面，即在实空间内没有对应于场值为 $C>R$ 的曲面，换句话说，没有一个场点上的场值会大于 R，因这时 f 为虚数，无物理意义。

对于由下列函数给出的标量场，

$$f=\arcsin\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

其等值面方程是

$$\arcsin\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}=C$$

或

$$\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}=\sin C,\quad z^2=(x^2+y^2)\sin^2 C$$

这是一系列以原点为顶点的圆锥面，如图 2-11 所示。需要指出的是原点属于所有的等值面，在这一点上 f 不是单值的。

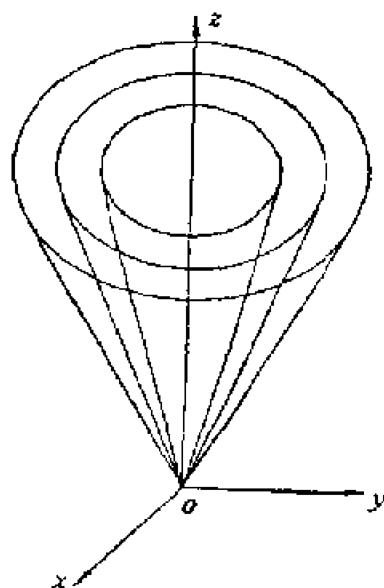


图 2-11　圆锥等位面

对于用标量场 f 表示的物理量，考察它从空间一个点移至另一个点时的变化情况是很重要的。为此取空间某一定点 $P(x_0,y_0,z_0)$ 并作通过它的等值面

$$f(x,y,z)=C$$

式中，$C=f(x_0,y_0,z_0)$。然后作一个由方程

$$f(x,y,z)=C+\Delta C$$

确定的等值面，见图 2-12。从 P 点过渡到另一等值面上的 M 点时，标量函数 f 的变化为 Δf，其值等于 ΔC。需要指出的是，函数值的变化与 M 点处于邻近等值面上的具体位置无关。

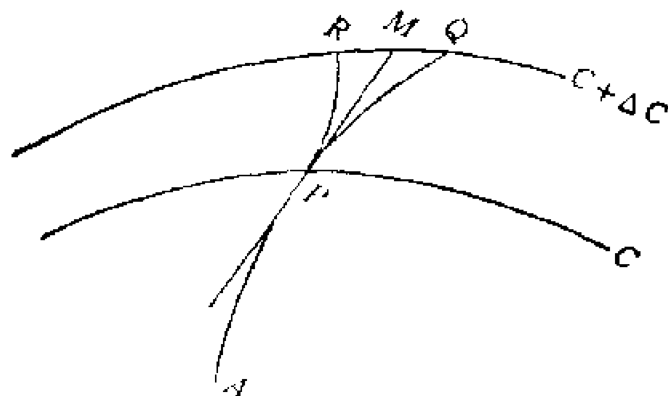


图 2-12 两个等值面

现在给出由 P 点出发指向某一方向的单位矢量 $\mathbf{a}$，并且把它表示成

$$\mathbf{a}=\cos(\mathbf{a},x)\mathbf{i}+\cos(\mathbf{a},y)\mathbf{j}+\cos(\mathbf{a},z)\mathbf{k}$$

式中，$\cos(\mathbf{a},x)$ 等为 $\mathbf{a}$ 的方向余弦，即单位矢量在 x 等轴上的投影。

根据上一节关于标量函数 f 在 P 点沿单位矢量方向的方向导数公式(2-34)，可知标量场 f 在方向 $\mathbf{a}$ 上的变化率，即沿 $\mathbf{a}$ 的方向在单位长度上的变化率为

$$\frac{df}{dS}=\cos(\mathbf{a},x)\frac{\partial f}{\partial x}+\cos(\mathbf{a},y)\frac{\partial f}{\partial y}+\cos(\mathbf{a},z)\frac{\partial f}{\partial z}$$

这个公式的右边可以写成两个矢量的点积，第一个矢量是

$$\mathbf{i}\frac{\partial f}{\partial x}+\mathbf{j}\frac{\partial f}{\partial y}+\mathbf{k}\frac{\partial f}{\partial z}$$

第二个矢量是单位矢量 $\mathbf{a}$

$$\mathbf{a}=\mathbf{i}\cos(\mathbf{a},x)+\mathbf{j}\cos(\mathbf{a},y)+\mathbf{k}\cos(\mathbf{a},z)$$

按照点积公式，它们之间的点积正好是 $\frac{\partial f}{\partial S}$ 公式的右边部分。

第一个矢量对于标量场的研究有重要意义。它有一个叫做标量场 f 的梯度这样的专门名称，并用符号 $\mathrm{grad}f$ 或 ∇f 表示。换句话说，梯度定义为下列矢量：

$$\mathrm{grad}f=\nabla f=\mathbf{i}\frac{\partial f}{\partial x}+\mathbf{j}\frac{\partial f}{\partial y}+\mathbf{k}\frac{\partial f}{\partial z} \qquad (2\text{-}40)$$

由公式(2-26)立即可以看出，

$$\text{grad}f = \nabla f = \lim_{V\to P}\frac{\int_S \mathbf{n}f dS}{V} \tag{2-41}$$

式中，$\mathbf{n}$ 指向包含 P 点的体积 V 的外部空间，并且 V 向 P 点收缩，所得极限值即是 P 的梯度，即梯度是一个与具体坐标系无关的量，它只与场点和场本身的结构有关。

我们再来研究一下梯度的最重要的性质。

由于等值面上的场的变化等于零，从而切线方向上的变化也等于零(见上节)，故

$$\frac{\partial f}{\partial S} = \text{grad}f \cdot \boldsymbol{\tau} = 0$$

式中，$\boldsymbol{\tau}$ 为沿切线方向的单位矢量。在梯度不为零的点上，它和另一不为零的单位矢量的点积为零只可能是两个矢量互相垂直。由此得出下列重要结论：梯度垂直于等值面的切线方向，即是一个沿着等值面法线方向的矢量。如果取法线方向为梯度的方向(另一可能的法线方向与此相反)，则梯度在法线方向上的投影等于梯度的幅值，即沿法线方向的方向导数

$$\frac{df}{dn} = |\text{grad}f| \tag{2-42}$$

由于式(2-42)的右边是一正数，故在法线方向上 $(dn>0)$，$df>0$，即在梯度方向上 $df>0$。由此可见，梯度是一个指向等值面法线方向的矢量，而且指向场值增加的方向，数值上它等于沿法线方向的场值变化率。

在其他方向上($\mathbf{a}$ 为这个方向上的单位矢量)，

$$\frac{df}{dS} = \text{grad}f \cdot \mathbf{a}$$

即场值在这个方向上的变化率等于梯度在这个方向上的投影。由梯度的定义立即可以看出，两个标量函数之和的梯度等于这两个函数的梯度之和：

$$\text{grad}(f+m) = \text{grad}f + \text{grad}m$$

还可看出两个函数的乘积 fm 其梯度等于

$$\text{grad}(fm) = f\text{grad}m + m\text{grad}f$$

有关梯度的更复杂的运算，我们将在符号运算法一章中详细介绍.

下面只举一个计算梯度的简单例子。假定有一点电荷 q 位于坐标系的原点. 由静电学我们知道这个点电荷的电位 U 是

$$U = \frac{1}{\varepsilon}\frac{q}{4\pi\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

式中 ε 为媒质的介电常数.

现在来求这个电位的梯度。根据梯度定义,

$$\frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{q}{4\pi\varepsilon}\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{q}{4\pi\varepsilon}\frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$

$$\frac{\partial U}{\partial z} = -\frac{q}{4\pi\varepsilon}\frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$

于是

$$\text{grad}U = -\frac{q}{4\pi\varepsilon}\cdot\frac{(\mathbf{i}x+\mathbf{j}y+\mathbf{k}z)}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$

$$= -\frac{q}{4\pi\varepsilon}\frac{\mathbf{r}}{r^3}$$

式中, $\mathbf{r} = \mathbf{i}x+\mathbf{j}y+\mathbf{k}z$ 为场点的位置矢量;

$$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

为从原点到场点的距离.

由静电学知,梯度 $\text{grad}U$ 的负值就是场点的场强矢量 $\mathbf{E}$, 即

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon}\frac{\mathbf{r}}{r^3}$$

2-7 矢量场通量和散度的概念，散度在直角坐标系中的表达式

上一节中我们研究了标量场并引入了它的最重要的特征量

——梯度的概念。这一节我们要研究矢量场并引入它的两个最重要的特征量，即通量和散度的概念。这些概念在与矢量场有关的学科中应用得很广泛。

设有一通过直角坐标表示的矢量场 $\mathbf{a}$，即

$$\mathbf{a}=\mathbf{a}(x,y,z)$$

矢量 $\mathbf{a}$ 可分解成三个坐标轴上的分量：

$$\mathbf{a}=a_x\mathbf{i}+a_y\mathbf{j}+a_z\mathbf{k}$$

为了便于想像起见，可以认为 $\mathbf{a}(x,y,z)$ 表示某一处于稳定流动状态的液体在 (x,y,z) 点上的速度。在场内取一任意曲面 S（不一定是封闭的），并从这曲面上分离出一个小面积元 dS。又令 dS 上某一点的单位法矢量为 $\mathbf{n}$，$\mathbf{n}$ 的方向也可任意选定。$\mathbf{n}dS$ 称为矢量面积元。称 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{n}dS$ 为通过面积元 dS 的 $\mathbf{a}$ 的通量。物理上它表示在单位时间内通过 dS 沿 $\mathbf{n}$ 方向的液体的数量。这就是通量这个名称的由来。数学上这只不过是 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{n}dS$ 这个量的名称，在不同的具体学科中可以有不同的物理意义。

将 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{n}dS$ 对曲面 S 积分

$$\int_S\mathbf{a}\cdot\mathbf{n}dS \tag{2-43}$$

所得到的表达式称为矢量场 $\mathbf{a}$ 通过曲面 S 的通量。物理上它表示在单位时间内曲面上的各点沿法线 $\mathbf{n}$ 方向通过曲面的液体的总量。

曲面 S 为封闭曲面的特殊情况，具有特别重要的意义。为了明显起见，我们在积分号上加一圆圈，即用

$$\oint_S\mathbf{a}\cdot\mathbf{n}dS \tag{2-44}$$

表示通过封闭曲面 S 的通量。在封闭曲面的情况下，可以有两种选择单位法矢量 $\mathbf{n}$ 的方式：一种是在曲面上的各点把 $\mathbf{n}$ 选成指向封闭曲面的外部；另一种是在曲面上的各点把 $\mathbf{n}$ 选成指向封闭曲面的内部。前一种情况物理上表示的是流出 S 的液体的总量，后一种情况则表示流入 S 的液体的总量。对于各种不同的场合，要

明确指出所选取的 $\mathbf{n}$ 的方向. 通常人们把 $\mathbf{n}$ 选成指向 S 外部空间方向的单位法矢量,但有时也选择 $\mathbf{n}$ 指向 S 内部，因此在阅读文献时要特别注意. 在以下讨论中,我们规定 $\mathbf{n}$ 指向 S 外部.

根据 $\oint_S \mathbf{a}\cdot\mathbf{n}dS$ 是正还是负,就可以判断液体是流出还是流入封闭曲面 S. 根据它的大小,可以判断里面的源或收点是强还是弱. 可是,S 有大有小,因此同样的积分值还不能说明里面的源是否一样强弱. 为了消除 S 大小的影响，我们将积分除以 S 所包的体积 V

$$\frac{\oint_S \mathbf{a}\cdot\mathbf{n}dS}{V} \tag{2-45}$$

这就能比较精确地表示里面源的大小了. 上述比值表明在单位时间内 S 内部单位体积所流出的液体量的平均值.

和瞬时速度的概念一样，如果将体积 V 或 S 无限缩小至所考察的点 P 并求出此时的极限值

$$\lim_{V\to P}\frac{\oint_S \mathbf{a}\cdot\mathbf{n}dS}{V}$$

那末,这个极限值存在的话,就表示从这一点出来的单位体积内源的强度.

这个极限在矢量分析中称为散度，并用 $\mathrm{div}\mathbf{a}$ 或 $\nabla\cdot\mathbf{a}$ 表示. 换句话说,散度定义为

$$\mathrm{div}\mathbf{a}=\nabla\cdot\mathbf{a}=\lim_{V\to P}\frac{\oint_S \mathbf{a}\cdot\mathbf{n}dS}{V} \tag{2-46}$$

由式(2-46)可见,矢量场的散度是一个标量.

如果 $\mathrm{div}\mathbf{a}>0$，我们就说在 P 点有源；如果 $\mathrm{div}\mathbf{a}<0$，我们就说在 P 点有收点. 这是根据以上物理意义所得出的名称.

由式(2-27)我们直接可得 $\mathrm{div}\mathbf{a}$ 在直角坐标系中的下列表达式;

$$\mathrm{div}\mathbf{a} = \nabla \cdot \mathbf{a} = \lim_{V \to P} \frac{\oint_S \mathbf{a} \cdot \mathbf{n} dS}{V}$$

$$= \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \tag{2-47}$$

我们再次强调，在 div$\mathbf{a}$ 定义中，$\mathbf{n}$ 的指向是朝 S 外部空间的。

下面给出两条有关散度运算的规则：

(1) 两个矢量场之和的散度等于各个矢量场的散度之和：

$$\mathrm{div}(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \mathrm{div}\mathbf{a} + \mathrm{div}\mathbf{b} \tag{2-48}$$

证明：令

$$\mathbf{a} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}$$

$$\mathbf{b} = b_x \mathbf{i} + b_y \mathbf{j} + b_z \mathbf{k}$$

则

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_x + b_x)\mathbf{i} + (a_y + b_y)\mathbf{j} + (a_z + b_z)\mathbf{k}$$

于是

$$\begin{aligned} \mathrm{div}(\mathbf{a} + \mathbf{b}) &= \frac{\partial(a_x + b_x)}{\partial x} + \frac{\partial(a_y + b_y)}{\partial y} + \frac{\partial(a_z + b_z)}{\partial z} \\ &= \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial b_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial b_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} + \frac{\partial b_z}{\partial z} \\ &= \left(\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}\right) \\ &\quad + \left(\frac{\partial b_x}{\partial x} + \frac{\partial b_y}{\partial y} + \frac{\partial b_z}{\partial z}\right) \\ &= \mathrm{div}\mathbf{a} + \mathrm{div}\mathbf{b} \end{aligned}$$

(2) $\mathrm{div}(u\mathbf{a}) = u\mathrm{div}\mathbf{a} + \mathbf{a} \cdot \mathrm{grad}u \qquad (2\text{-}49)$

式中，u 为 x, y, z 的标量函数，即标量场。

证明：

$$\mathbf{a} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}, u\mathbf{a} = ua_x \mathbf{i} + ua_y \mathbf{j} + ua_z \mathbf{k}$$

因此

$$
\begin{aligned}
\operatorname{div}(u\mathbf{a}) &= \nabla\cdot(u\mathbf{a})\\
&= \frac{\partial(ua_x)}{\partial x}+\frac{\partial(ua_y)}{\partial y}+\frac{\partial(ua_z)}{\partial z}\\
&= u\frac{\partial a_x}{\partial x}+a_x\frac{\partial u}{\partial x}+u\frac{\partial a_y}{\partial y}\\
&\quad+a_y\frac{\partial u}{\partial y}+u\frac{\partial a_z}{\partial z}+a_z\frac{\partial u}{\partial z}\\
&= u\left(\frac{\partial a_x}{\partial x}+\frac{\partial a_y}{\partial y}+\frac{\partial a_z}{\partial z}\right)\\
&\quad+\left(a_x\frac{\partial u}{\partial x}+a_y\frac{\partial u}{\partial y}+a_z\frac{\partial u}{\partial z}\right)
\end{aligned}
$$

但第二个括号内的项是 $\mathbf{a}$ 和 $\operatorname{grad}u$ 的点积，

$$
\mathbf{a}\cdot\operatorname{grad}u = a_x\frac{\partial u}{\partial x}+a_y\frac{\partial u}{\partial y}+a_z\frac{\partial u}{\partial z}
$$

故最后得

$$
\begin{aligned}
\operatorname{div}(u\mathbf{a}) &= \nabla\cdot(u\mathbf{a})\\
&= u\operatorname{div}\mathbf{a}+\mathbf{a}\cdot\operatorname{grad}u\\
&= u\nabla\cdot\mathbf{a}+\mathbf{a}\cdot\nabla u
\end{aligned}
$$

用第四章中的符号运算法很容易得到这个结果. div 的更复杂的运算详见第四章符号运算法.

2-8 高斯定理

在矢量场论中，关于散度有一条称为高斯定理的著名定理，它应用得相当广泛. 在第四章符号运算法的定理证明中，它起的作用更加关键. 我们先叙述一下这条定理，然后再对它加以证明.

高斯定理 通过封闭曲面 S 的矢量 $\mathbf{a}$ 的通量，等于 $\operatorname{div}\mathbf{a}$ 对 S 所包体积 V 的积分：

$$
\oint_S \mathbf{a}\cdot\mathbf{n}\,dS = \int_V \operatorname{div}\mathbf{a}\,dV
$$

这里假定在 S 内部矢量 $\mathbf{a}$ 是连续的，并具有连续的一阶偏导数.

证明：根据 $\text{div}\mathbf{a}$ 的定义

$$\text{div}\mathbf{a} = \lim_{V\to P} \frac{\oint_S \mathbf{a}\cdot \mathbf{n}dS}{V} \tag{2-50}$$

这个积分式的极限可以写成一个求和式加上一个无穷小量，即

$$\text{div}\mathbf{a} = \frac{\sum_i \mathbf{a}\cdot n_i\Delta S_i}{\Delta V} + \varepsilon \tag{2-51}$$

式中，随着 $\Delta V \to 0$，$\varepsilon \to 0$。令 ΔV_j 表示体积 V 内的某一体积元，则可写出

$$\text{div}\mathbf{a}\Delta V_j = \sum_i a \cdot \mathbf{n}_{ij}\Delta S_{ij} + \varepsilon_j\Delta V_j \tag{2-52}$$

式中，ΔS_{ij} 表示包围体积 V_j 的封闭曲面 S_j 上的面积元。$\mathbf{n}_{ij}$ 是 ΔS_{ij} 上朝向 V_j 外部的单位法矢量。

将式(2-52)对 j 求和，得

$$\sum_j (\text{div}\mathbf{a})\Delta V_j = \sum_j\sum_i a \cdot \mathbf{n}_{ij}\Delta S_{ij} + \sum_j {}_j\varepsilon_j\Delta V_j$$

由于 $\Delta V_j \to 0$ 时 $\varepsilon_j \to 0$，并由于假定了 $\mathbf{a}$ 是连续函数，从而积分存在，于是

$$\int_V \text{div}\mathbf{a}dV = \oint_S \mathbf{a}\cdot\mathbf{n}dS \tag{2-53}$$

这就是要证明的高斯定理。需要指出的是，相邻两体积元 V_j 公共壁上的法线方向相反，$\mathbf{a}\cdot\mathbf{n}_{ij}\Delta S_{ij}$ 相互抵消，因此剩下的只是 V 的外包曲面 S 的贡献。这里再次指出，$\mathbf{n}$ 是朝向 S 外部的单位法矢量。

2-9 矢量的环路积分和矢量场的旋度概念

在 2-3-1 节中，我们已经引入了矢量函数线积分概念，同时引入了下列符号：

$$\int_l \mathbf{f}\cdot d\mathbf{l}$$

其中，$\mathbf{f}$ 为矢量函数，$d\mathbf{l}$ 为曲线(不一定封闭) l 上的有向线元. $\mathbf{f}\cdot d\mathbf{l}$ 表示矢量 $\mathbf{f}$ 和 $d\mathbf{l}$ 之间的点积.

在场论特别是电磁场理论中，一种非常重要的情况是 l 为封闭曲线. 这时沿封闭曲线(用 L 表示)的线积分用下列符号表示:

$$\oint_L \mathbf{f}\cdot d\mathbf{l}$$

这种沿封闭曲线的积分称为矢量 $\mathbf{f}$ 的环路积分. 对于每种具体情况,必须明确指出环路的绕行方向.它的一般选择方法是: 如果已经确定了环路所张曲面上的法线指向，则环路的绕行方向就选成从法矢端朝下看，绕行方向为逆时针方向,如图 2-13 所示.

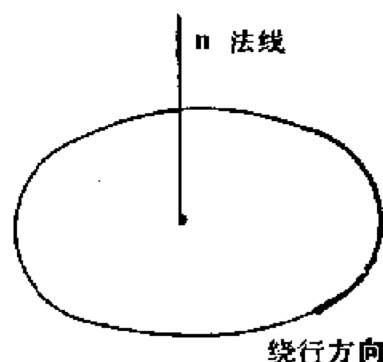


图 2-13 环路绕行方向的选取方法

有时情况正好相反,也就是说,若环路绕行方向已选定，则法线方向就选成从法矢量终点朝下看，绕行方向为逆时针方向.

有了环路积分的概念，现在我们就可引入一个矢量场论中的基本概念,即矢量场旋度概念.

矢量场 $\mathbf{f}$ 的旋度定义为一个矢量函数,它在任意方向上的投影,等于矢量场 $\mathbf{f}$ 沿封闭曲线 L(平面的)的环路积分除以 L 所含面积 ΔS 在 L 处缩成一点 (或 $\Delta S\to 0$)时所得的极限. 这里 L 平面选成垂直于任意方向(选定的)的平面.

矢量场 $\mathbf{f}$ 的旋度用 $\mathrm{rot}\mathbf{f}$, $\mathrm{curl}\mathbf{f}$ 或 $\nabla\times\mathbf{f}$ 表示. 把上述定义用数学式子写出来,就是

$$\mathrm{rot}_n\mathbf{f}=\lim_{\Delta S\to 0}\frac{\oint_L \mathbf{f}\cdot d\mathbf{l}}{\Delta S} \tag{2-54}$$

这里要强调的是,L 所张小平面的法线 $\mathbf{n}$ 其方向选成从终点朝下看,L 绕行方向为逆时针方向.

有了上面的定义之后，首先需要考虑的一个问题就是存在不存在满足上述定义要求的矢量函数. 如果不存在这样的函数，那

末这个定义只能表示一种愿望而没有任何实际意义。

为了说明存在这样一个矢量函数，就要证明式(2-54)等号右边确实是某个矢量在 ΔS 法线 $\mathbf{n}$ 方向上的投影。为了证明这一点，让我们来看一个很小的三角形 ABC，它在空间的位置是任意的，但三个顶点都位于坐标轴上(图 2-14)。

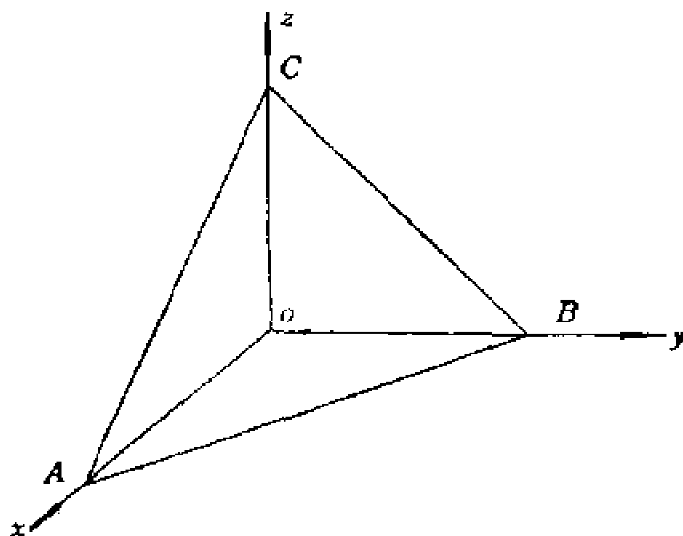


图 2-14　顶点在坐标轴上的三角形 ABC

由图 2-14 可以清楚地看出

$$\oint_{oABo} \mathbf{f}\cdot d\mathbf{l}+\oint_{oBCo} \mathbf{f}\cdot d\mathbf{l}+\oint_{oCAo} \mathbf{f}\cdot d\mathbf{l}=\oint_{ABCA} \mathbf{f}\cdot d\mathbf{l} \qquad (2\text{-}55)$$

因为沿线段 oA, oB 和 oC 的线积分在相反方向上取过两次，所以它们就互相抵消了。

令 α,β,γ 为三角形 ABC 的法线与坐标轴的夹角。因为三角形 oAB、oBC 和 oCA 是三角形 ABC 分别在 xoy、yoz 和 xoz 平面上的投影，故

$$S_{oAB}=S_{ABC}\cos\gamma$$
$$S_{oBC}=S_{ABC}\cos\alpha$$
$$S_{oCA}=S_{ABC}\cos\beta$$

如果引入由下列等式所确定的量 I_n, I_x, I_y, I_z：

$$\oint_{ABCA} \mathbf{f}\cdot d\mathbf{l}=I_n S_{ABC} \quad \oint_{oABo} \mathbf{f}\cdot d\mathbf{l}=I_z S_{oAB}$$

$$\oint_{oBCo} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{l} = I_x S_{oBC} \quad \oint_{oCAo} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{l} = I_y S_{oCA} \qquad (2\text{-}56)$$

则式(2-55)变为

$$I_n S_{ABC} = I_z S_{oAB} + I_x S_{oBC} + I_y S_{oCA}$$

或

$$I_n S_{ABC} = I_z S_{ABC} \cos\gamma + I_x S_{ABC} \cos\alpha + I_y S_{ABC} \cos\beta$$

约去公因子 S_{ABC} 后，就能看出 I_n 是矢量

$$\mathbf{I} = I_x \mathbf{i} + I_y \mathbf{j} + I_z \mathbf{k}$$

在 ABC 法线方向上的投影，而由式(2-56)可见，I_n，I_x，I_y 和 I_z 是 $\mathbf{f}$ 的环路积分(沿三角形 ABC, oBC, oAB) 与相应三角形面积之比。这样，式(2-54)中的极限就可以看成是某个矢量 $\mathbf{I}$ 在 ΔS 法线方向上的投影，至少对三角形的小面积是这样。但当矢量 $\mathbf{f}$ 为连续并有连续的一阶导数时，任何无限小的面积均可用平面来逼近，因此不影响上面证明的普遍性。

这里要注意的一点是，环路 $oABo$ 和三角形 oAB 的大小均与 $\cos\gamma$ 成正比，因而环路积分值和 S_{oAB} 之比与 $\cos\gamma$ 无关，从而 I_z 与 ABC 在空间的指向无关。同样，I_x 和 I_y 也和 ABC 在空间的指向无关，由此

$$\mathbf{I} = I_x \mathbf{i} + I_y \mathbf{j} + I_z \mathbf{k}$$

与 ABC 的指向无关，它只是一个与 $\mathbf{f}$ 有关的量。

2-10 旋度在直角坐标系中的表达式

上节证明的确存在一个矢量 rotf，它在某个面积的法向上的投影等于沿这个面积的环积分除以面积大小，然后面积趋向于零的极限。现在就根据这一点来具体推算 rotf 的在直角坐标系中的各个分量，以获得 rotf 的明显表达式。

根据 rotf 的定义 (rotf 的存在已证明)，它在点 $P(x_0, y_0, z_0)$ 向轴 ox 方向上的投影，等于沿某个垂直于 ox 轴的小面积的环路积分，除以这个小面积的大小，再令小面积趋于零时的极限。作

为这样的小面积，我们取中心在 P 点的小矩形 $ABCD$，它处在平行于 yoz 的平面内(图 2-15)。

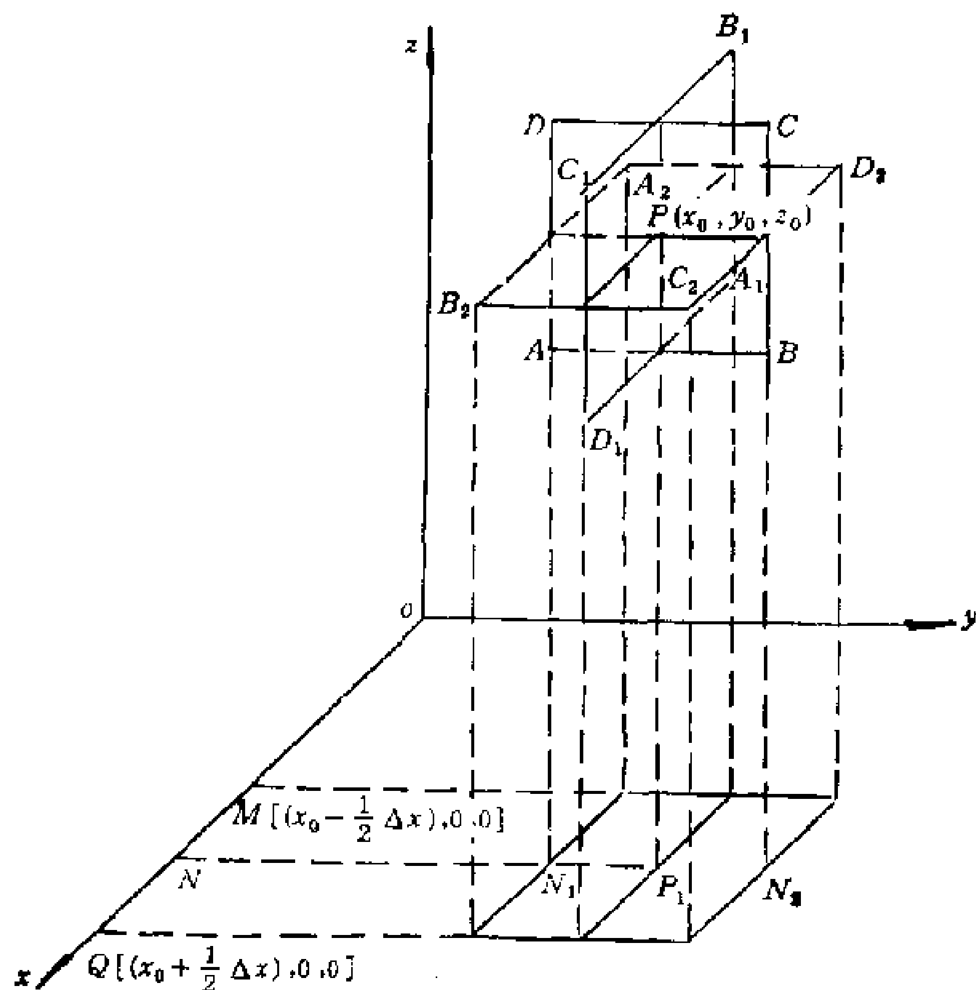


图 2-15 计算旋度分量的小面积

令矩形 $ABCD$ 的尺寸为 $AB = \Delta y$，$AD = \Delta z$。沿 $ABCD$ 的环路积分由沿 AB, BC, CD, DA 的线积分之和组成。在 AB 边上 $x = x_0$，$z = z_0 - \frac{1}{2}\Delta z$，而 y 由 $y_0 - \frac{1}{2}\Delta y$ 变至 $y_0 + \frac{1}{2}\Delta y$. 另外，$dl = dy$；积分方向和 y 轴的正向相同，因此这里 $\mathbf{f} \cdot d\mathbf{l} = f_y dy$。 在对边 CD 上有 $x = x_0$，$z = z_0 + \frac{1}{2}\Delta z$，$\mathbf{f} \cdot d\mathbf{l} = -f_y dy$，因为环行方向与 y 轴的正向相反(在 CD 上)，而积分总是由 $y_0 - \frac{1}{2}\Delta y$ 积至 $y_0 + \frac{1}{2}\Delta y$ 的，所以

$$\int_{AB} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{l} + \int_{CD} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{l}$$

$$= \int_{y_0-\frac{1}{2}\Delta y}^{y_0+\frac{1}{2}\Delta y} \left[f_y\left(x_0, y, z_0 - \frac{1}{2}\Delta z\right) - f_y\left(x_0, y, z_0 + \frac{1}{2}\Delta z\right)\right] dy$$

应用拉格朗有限差分定理和中值定理后，得

$$\int_{AB} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{l} + \int_{CD} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{l}$$

$$= - \int_{y_0-\frac{1}{2}\Delta y}^{y_0+\frac{1}{2}\Delta y} \frac{\partial}{\partial z} f_y(x_0, y, z_0 + \theta_1 \Delta z) \Delta z dy$$

$$= -\left(\frac{\partial}{\partial z} f_y\right)_1 \Delta z \Delta y$$

式中，θ_1 为一绝对值小于 1/2 的量，一般来说，它与 y 有关；$\left(\frac{\partial}{\partial z} f_y\right)_1$ 为 $\frac{\partial f_y}{\partial z}$ 在矩形 $ABCD$ 中的某点的值。与此相类似，

$$\int_{BC} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{l} + \int_{DA} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{l} = \left(\frac{\partial}{\partial y} f_z\right)_2 \Delta z \Delta y$$

因此 $\mathbf{f}$ 沿 $ABCD$ 的环路积分可写成

$$\oint_{ABCD} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{l} = \left[\left(\frac{\partial}{\partial y} f_z\right)_2 - \left(\frac{\partial}{\partial y} f_y\right)_1\right] \Delta z \Delta y$$

但由于 $S_{ABCD} = \Delta y \Delta z$，故

$$\frac{\oint_{ABCD} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{l}}{\Delta y \Delta z} = \left(\frac{\partial}{\partial y} f_z\right)_2 - \left(\frac{\partial}{\partial z} f_y\right)_1$$

取 $\Delta y \to 0, \Delta z \to 0$ 之极限，得

$$\text{rot}_x \mathbf{f} = \frac{\partial f_z}{\partial y} - \frac{\partial f_y}{\partial z}$$

此处 $\frac{\partial f_z}{\partial y}$ 及 $\frac{\partial f_y}{\partial z}$ 的值为在 P 点的值。

将类似的推导应用到沿矩形 $A_1B_1C_1D_1$ 和 $A_2B_2C_2D_2$ 的环路上去，可得 $\mathrm{rot}\mathbf{f}$ 在坐标轴上的投影为

$$\begin{cases} \mathrm{rot}_x\mathbf{f} = \dfrac{\partial f_z}{\partial y} - \dfrac{\partial f_y}{\partial z} \\ \mathrm{rot}_y\mathbf{f} = \dfrac{\partial f_x}{\partial z} - \dfrac{\partial f_z}{\partial x} \\ \mathrm{rot}_z\mathbf{f} = \dfrac{\partial f_y}{\partial z} - \dfrac{\partial f_x}{\partial y} \end{cases} \tag{2-57}$$

于是

$$\mathrm{rot}\mathbf{f} = \left(\frac{\partial f_z}{\partial y} - \frac{\partial f_y}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial f_x}{\partial z} - \frac{\partial f_z}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial f_y}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial y}\right)\mathbf{k} \tag{2-58}$$

为了便于记忆，$\mathrm{rot}\mathbf{f}$ 可写成

$$\mathrm{rot}\mathbf{f} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ f_x & f_y & f_z \end{vmatrix}$$

只需按一般规则展开行列式，并记住把 $\frac{\partial}{\partial x}$，$\frac{\partial}{\partial y}$，$\frac{\partial}{\partial z}$ 始终放在 f_x, f_y, f_z 前面，就很容易得到 $\mathrm{rot}\mathbf{f}$ 的表达式了。

现在我们来回忆一下表达式(2-28)。在那里我们证明了

$$\lim_{V\to P}\frac{\int_S \mathbf{n}\times\mathbf{f}dS}{V} = \mathbf{i}\left(\frac{\partial f_z}{\partial y} - \frac{\partial f_y}{\partial z}\right) + \mathbf{j}\left(\frac{\partial f_x}{\partial z} - \frac{\partial f_z}{\partial x}\right) + \mathbf{k}\left(\frac{\partial f_y}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial y}\right)$$

这个等式的右边正好是 $\mathrm{rot}\mathbf{f}$ 的表达式。由此得到一个重要的关系式：

$$\text{rot}\mathbf{f} = \lim_{V \to P} \frac{\oint_S \mathbf{n} \times \mathbf{f} dS}{V} \tag{2-59}$$

这里，P点指的是计算 rot**f** 的场点。$V \to P$ 意味着V向P点收缩并最后收缩成P点。封闭曲面S相应地也向P点收缩，最后以P点为极限。从式(2-59)还可明显地看出，rot**f** 是一个只与场具体结构有关，而与具体坐标系无关的量，它反映了场的内在性质，是矢量场的一个重要的特征量。

下面来证明几条有关旋度的简单性质。更复杂的情况我们将在第四章中研究。

(1) 旋度的散度等于零

$$\text{divrot}\mathbf{f} = 0$$

证明：

$$\begin{aligned}
\text{divrot}\mathbf{f} &= \frac{\partial \text{rot}_x \mathbf{f}}{\partial x} + \frac{\partial \text{rot}_y \mathbf{f}}{\partial y} + \frac{\partial \text{rot}_z \mathbf{f}}{\partial z} \\
&= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f_z}{\partial y} - \frac{\partial f_y}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f_x}{\partial z} - \frac{\partial f_z}{\partial x}\right) \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f_y}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial y}\right) \\
&= \frac{\partial^2 f_z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f_y}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 f_x}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 f_z}{\partial y \partial x} \\
&\quad + \frac{\partial^2 f_y}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 f_x}{\partial z \partial y} \\
&= 0
\end{aligned}$$

(2) 矢量场之和的旋度等于各场旋度之和

$$\text{rot}(\mathbf{f} + \mathbf{g}) = \text{rot}\mathbf{f} + \text{rot}\mathbf{g}$$

其证明方法与梯度、散度类似性质的证明方法相同。

(3) $\text{rot}(u\mathbf{f}) = u\text{rot}\mathbf{f} + \text{grad}u \times \mathbf{f}$ (2-60)

式中u为x, y, z的标量函数。

证明：

先写出 rot($u\mathbf{f}$) 在 x 轴上的投影：

$$\mathrm{rot}_x(u\mathbf{f}) = \frac{\partial}{\partial y}(uf_z) - \frac{\partial}{\partial z}(uf_y)$$

$$= u\frac{\partial f_z}{\partial y} + f_z\frac{\partial u}{\partial y} - u\frac{\partial f_y}{\partial z} - f_y\frac{\partial u}{\partial z}$$

$$= u\left(\frac{\partial f_z}{\partial y} - \frac{\partial f_y}{\partial z}\right) + f_z\frac{\partial u}{\partial y} - f_y\frac{\partial u}{\partial z}$$

$$= u\,\mathrm{rot}_x\mathbf{f} + (\mathrm{grad}\,u \times \mathbf{f})_x$$

这是因为 $\frac{\partial u}{\partial y}$，$\frac{\partial u}{\partial z}$ 为 grad$u$ 在 y，z 轴上的投影。与此相类似：

$$\mathrm{rot}_y(u\mathbf{f}) = u\,\mathrm{rot}_y\mathbf{f} + (\mathrm{grad}\,u \times \mathbf{f})_y$$

$$\mathrm{rot}_z(u\mathbf{f}) = u\,\mathrm{rot}_z\mathbf{f} + (\mathrm{grad}\,u \times \mathbf{f})_z$$

由于式(2-60)左边和右边矢量在坐标轴上的投影都相等，故矢量本身也相等。

(4) $\mathrm{d\ v}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{b}\cdot\mathrm{rot}\,\mathbf{a} - \mathbf{a}\cdot\mathrm{rot}\,\mathbf{b}$ (2-61)

证明：

$$\mathrm{div}(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) = \frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{a}\times\mathbf{b})_x + \frac{\partial}{\partial y}(\mathbf{a}\times\mathbf{b})_y + \frac{\partial}{\partial z}(\mathbf{a}\times\mathbf{b})_z$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(a_yb_z - a_zb_y) + \frac{\partial}{\partial y}(a_zb_x - a_xb_z) + \frac{\partial}{\partial z}(a_xb_y - a_yb_x)$$

$$= b_x\left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right) + b_y\left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right) + b_z\left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right) - a_x\left(\frac{\partial b_z}{\partial y} - \frac{\partial b_y}{\partial z}\right) - a_y\left(\frac{\partial b_x}{\partial z} - \frac{\partial b_z}{\partial x}\right) - a_z\left(\frac{\partial b_y}{\partial x} - \frac{\partial b_x}{\partial y}\right)$$

$$= \mathbf{b} \cdot \mathrm{rot}\mathbf{a} - \mathbf{a} \cdot \mathrm{rot}\mathbf{b}$$

2-11 斯托克斯定理

在上一节中我们证明了一个把 rot**f** 与体积分连系起来的关系式：

$$\mathrm{rot}\mathbf{f} = \lim_{V \to P} \frac{\int_S \mathbf{n} \times \mathbf{f} dS}{V}$$

这一节我们将证明一个把 rot**f** 的面积分和 **f** 的线积分联系起来的关系式，这就是著名的斯托克斯定理。

斯托克斯定理 矢量 **f** 沿封闭曲线 L 的环路积分，等于 **f** 的旋度通过张在 L 上的任意曲面 S 的通量：

$$\oint_L \mathbf{f} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \mathrm{rot}\mathbf{f} \cdot \mathbf{n} dS$$

这里 $d\mathbf{l}$ 是沿环路绕行方向的矢量线元，$\mathbf{n}$ 是 dS 的法线。环路绕行方向应选为在从 $\mathbf{n}$ 的终端向下看时绕行方向为逆时针方向。对 **f** 的要求则为它需连续并具有连续的一阶偏导数。

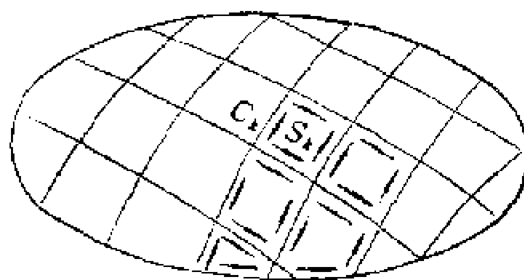


图 2-16　S 分成小面积元 S_k

证明过程和高斯定理的证明过程有很多相似之处。具体过程如下：

首先，将曲面 S 分成若干个小面积元 $S_k\mathbf{n}$，这些小面积元以后我们将使之趋于零（图 2-16）。

选定一个任意小的正数 ε 后，根据 rot**f** 的定义，即

$$\mathrm{rot}_n\mathbf{f} = \lim_{S_k \to 0} \frac{\oint_{C_k} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{l}}{S_k}$$

对每一块小面积都可写出不等式：

$$\left|\oint_{C_k}\mathbf{f}\cdot d\mathbf{l}-\mathrm{rot}_n\mathbf{f}\cdot S_k\right|<\varepsilon S_k$$

这里 ε 适用于所有小面积元的原因在于 $\mathbf{f}$ 和 $\mathrm{rot}\mathbf{f}$ 的连续性（一致连续性）的这一性质。

将对所有面积元的同样形式的不等式加起来，并注意到线积分将只沿 L 进行，因为沿其它线元的积分都相互抵消（相邻两面积元边界的绕行方向相反，见图 2-16），于是得

$$\left|\oint_{L}\mathbf{f}\cdot d\mathbf{l}-\sum\mathrm{rot}_n\mathbf{f}\cdot S_k\right|<\varepsilon S$$

在 $S_k\to 0$ 的极限情况下，有

$$\left|\oint_{L}\mathbf{f}\cdot d\mathbf{l}-\int_S\mathrm{rot}_n\mathbf{f}dS\right|<\varepsilon S$$

可是，由于 ε 是一任意小数，故有

$$\oint_{L}\mathbf{f}\cdot d\mathbf{l}=\int_S\mathrm{rot}\mathbf{f}\cdot\mathbf{n}dS$$

这就是我们所要证明的斯托克斯定理。

第三章　曲线坐标系

在具体的工程技术领域中，物体的边界形状是多种多样的。为了研究各种形状的物体，除了直角坐标系外，还需要选用其他形式的坐标系。本章旨在系统地讨论所谓的曲线坐标系理论，特别是正交曲线坐标系理论，并列出空间中所有可能的正交曲线坐标系的有关公式，供读者需要时参考。初学者可先跳过本章直接学习下一章内容，在以后碰到有关问题时再回过头来阅读。

3-1　曲线坐标系的一般理论

3-1-1　确定空间中点的位置的方法

大家知道，对于确定空间中某一点的位置来说，最常用的方法是给出这一点在某个直角坐标系中的三个坐标 x,y,z。这里的x，y，z 是三个数字，它们分别表示这一点在 x,y,z 轴上的投影到原点的距离（当然，事先要规定好一个长度单位，如m等），如图3-1所示。x,y,z 称为 P 点的**直角坐标**。

如果能给出一组一一对应的规则，以使我们能根据 x,y,z 唯一地求出 u,v,w 这三个数，而且，反之亦可由 u,v,w 唯一地求出原先的 x,y,z 来；具体而言，即若能给出下面这样一组函数关系：

$$u = f(x,y,z), v = g(x,y,z), w = h(x,y,z) \tag{3-1}$$

以使我们能根据给定的 x,y,z 唯一地确定 u,v,w，并且反过来，还是利用同一个方程组(3-1)可根据给定的 u,v,w 由这个方程组能唯一地解出一组 x,y,z 来，即由 u,v,w 能求出：

$$x = \varphi(u,v,w), y = \phi(u,v,w), z = \chi(u,v,w) \tag{3-2}$$

这些 x,y,z 应满足方程(3-1)，即

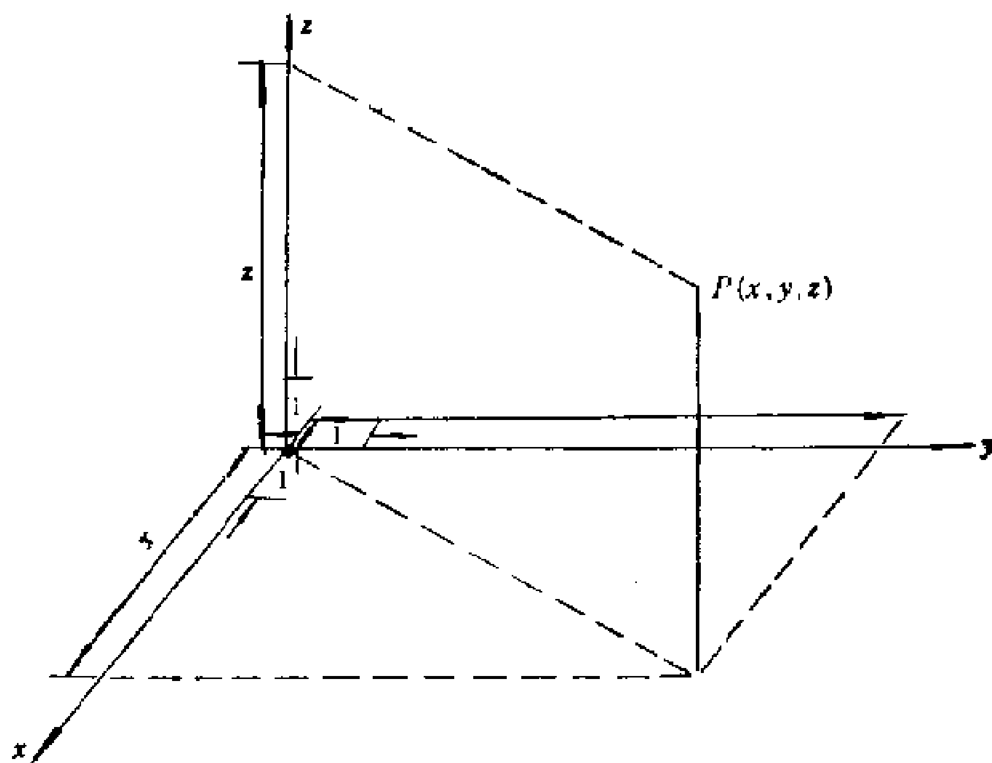


图 3-1　直角坐标系

$$\begin{cases} u = f(\varphi(u,v,w),\phi(u,v,w),\chi(u,v,w)) \\ v = g(\varphi(u,v,w),\phi(u,v,w),\chi(u,v,w)) \\ w = h(\varphi(u,v,w),\phi(u,v,w),\chi(u,v,w)) \end{cases} \tag{3-3}$$

那末，u,v,w 这三个数也可以用来确定 P 点的位置，因为知道了 u,v,w 之后，由式(3-2)即可求出 x,y,z，从而确定了 P 点的位置。反之，已知 x,y,z，由式(3-1)即可求出与之对应的 u,v,w 来。

由此可见，只要给定了函数 f,g,h 或 φ,ϕ,χ，则从确定 P 点位置的观点来看，u,v,w 和 x,y,z 是同样有效的。因此 u,v,w 也可以看成是 P 点的坐标。u,v,w 称为 P 点的曲线坐标。

所谓给出 P 点的曲线坐标，实际上就是给出函数组(3-1)或(3-2)。两组函数只要给出其中的一组就够了，因为另一组可以通过解方程求出来。

从便于使用的角度来看，通常人们给出的是方程组(3-2)，即将 x,y,z 通过 u,v,w 表示。当然，这丝毫也不妨碍给出或求出方程组(3-1)。

对函数 f,g,h 和 φ,ψ,χ 的限制为要求 x,y,z 和 u,v,w 是一一对应的，也就是说，f,g,h 的反函数 φ,ψ,χ 应是单值的。另外，f,g,h 和 φ,ψ,χ 应是连续的，具有连续导数的函数。

下面举一些有关 φ,ψ,χ 的具体例子来说明。

（1）直角坐标系

$$\begin{cases} x = u & -\infty < u < +\infty \\ y = v & -\infty < v < +\infty \\ z = w & -\infty < w < +\infty \end{cases} \tag{3-4}$$

（2）圆柱坐标系

$$\begin{cases} x = u\cos v & 0 \leqslant u < +\infty \\ y = u\sin v & 0 \leqslant v < 2\pi \\ z = w & -\infty < w < +\infty \end{cases} \tag{3-5}$$

（3）球坐标系

$$\begin{cases} x = u\sin v\cos w & 0 \leqslant u < +\infty \\ y = u\sin v\sin w & 0 \leqslant v \leqslant \pi \\ z = u\cos v & 0 \leqslant w < 2\pi \end{cases} \tag{3-6}$$

（4）椭圆柱坐标系

$$\begin{cases} x = a\operatorname{ch}u\cos v & 0 \leqslant u < +\infty \\ y = a\operatorname{sh}u\sin v & 0 \leqslant v < 2\pi \\ z = w & -\infty < z < +\infty \end{cases} \tag{3-7}$$

式中 a 为常数。

（5）抛物柱坐标系

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{2}(u^2 - v^2) & 0 \leqslant u < +\infty \\ y = uv & -\infty < v < +\infty \\ z = w & -\infty < w < +\infty \end{cases} \tag{3-8}$$

（6）长椭球坐标系

$$\begin{cases} x = a\operatorname{sh}u\sin v\cos w & 0 \leqslant u < \infty \\ y = a\operatorname{sh}u\sin v\sin w & 0 \leqslant v \leqslant \pi \\ z = a\operatorname{ch}u\cos v & 0 \leqslant w < 2\pi \end{cases} \tag{3-9}$$

式中，a 为常数。

(7) 扁椭球坐标系

$$\begin{cases} x = a\,\mathrm{ch}u\sin v\cos w & 0 \leqslant u < \infty \\ y = a\,\mathrm{ch}u\sin v\sin w & 0 \leqslant v \leqslant \pi \\ z = a\,\mathrm{sh}u\cos v & 0 \leqslant \psi < 2\pi \end{cases} \tag{3-10}$$

式中，a 为常数。

(8) 抛物面坐标系

$$\begin{cases} x = uv\cos w & 0 \leqslant u < \infty \\ y = uv\sin w & 0 \leqslant v < \infty \\ z = \dfrac{1}{2}(u^2 - v^2) & 0 \leqslant w < 2\pi \end{cases} \tag{3-11}$$

(9) 锥面坐标系

$$\begin{cases} (x)^2 = \left(\dfrac{uvw}{bc}\right)^2 & 0 \leqslant u < \infty \\ (y)^2 = \dfrac{u^2(v^2 - b^2)(b^2 - w^2)}{b^2(c^2 - b^2)} & b^2 < v^2 < c^2 \\ (z)^2 = \dfrac{u^2(c^2 - v^2)(c^2 - w^2)}{c^2(c^2 - b^2)} & 0 < w^2 < b^2 \end{cases} \tag{3-12}$$

式中，c, b 为常数；$c^2 > v^2 > b^2 > w^2 > 0$。

(10) 椭球面坐标系

$$\begin{cases} (x)^2 = \left(\dfrac{uvw}{bc}\right)^2 & c^2 < u^2 < \infty \\ (y)^2 = \dfrac{(u^2 - b^2)(v^2 - b^2)(b^2 - w^2)}{b^2(c^2 - b^2)} & b^2 < v^2 < c^2 \\ (z)^2 = \dfrac{(u^2 - c^2)(c^2 - b^2)(c^2 - w^2)}{c^2(c^2 - b^2)} & 0 \leqslant w^2 < b^2 \end{cases} \tag{3-13}$$

式中，b, c 为常数。

(11) 抛物面坐标系

$$\begin{cases} (x)^2 = \dfrac{4}{b - c}(u - b)(b - v)(b - w) & b < u < \infty \\ (y)^2 = \dfrac{4}{b - c}(u - c)(c - v)(w - c) & 0 < v < c \\ z = u + v + w - b - c & c < w < b \end{cases} \tag{3-14}$$

式中，b,c 为常数;$u > b > w > c > v > 0$。

(12) 环面坐标系

$$\begin{cases} x = \dfrac{\mathrm{sh}u\cos v}{\mathrm{ch}u - \cos w} & 0 \leqslant u < \infty \\ y = \dfrac{\mathrm{sh}u\sin v}{\mathrm{ch}u - \cos w} & 0 \leqslant v < 2\pi \\ z = \dfrac{\sin w}{\mathrm{ch}u - \cos w} & -\pi < w \leqslant \pi \end{cases} \tag{3-15}$$

(13) 双极坐标系

$$\begin{cases} x = \dfrac{\sin u\cos v}{\mathrm{ch}w - \cos u} & 0 \leqslant u < \pi \\ y = \dfrac{\sin u\sin v}{\mathrm{ch}w - \cos u} & 0 \leqslant v < 2\pi \\ z = \dfrac{\mathrm{sh}w}{\mathrm{ch}w - \cos u} & -\infty < w < +\infty \end{cases} \tag{3-16}$$

所有这些坐标系统都将在下文中详细研究。

3-1-2 坐标面与坐标线的概念

在方程组

$$\begin{cases} x = \varphi(u,v,w) \\ y = \phi(u,v,w) \\ z = \chi(u,v,w) \end{cases}$$

中,若固定 u,v,w 中一个自变量(例如 u)的数值,而另外两个自变量 (v,w) 则任其变化,此时相应的 x,y,z 在空间中的轨迹称为对应于 u 的坐标面.这个坐标面一般来说是空间中的一个曲面,因为固定了 u 值为 u_0 后,我们得到

$$\begin{cases} x = \varphi(u_0,v,w) \\ y = \phi(u_0,v,w) \\ z = \chi(u_0,v,w) \end{cases}$$

由这个方程组的头两个方程解出 w,v(以 x,y 表示 w,v) 并代入第三个方程,得

$$z = \chi(u_0, v(x,y), w(x,y)) = z(x,y)$$

这是空间中的一个曲面。

如果固定 u, v, w 中两个自变量(例如 u, v)的数值，而自变量 w 则任其变化，此时相应的 x, y, z 在空间中的轨迹称为对应于 w 的坐标线。一般来说，这根坐标线是空间中的一根曲线，因为固定了 u, v 值为 u_0, v_0 后，我们得到

$$\begin{cases} x = \varphi(u_0, v_0, w) \\ y = \psi(u_0, v_0, w) \\ z = \chi(u_0, v_0, w) \end{cases}$$

由头一个方程解出 w 并代入第二、三个方程，得

$$\begin{cases} y = y(x) \\ z = z(x) \end{cases}$$

这是空间中的一根曲线。

特别要注意的是，在对应于 u 的坐标面中，u 是常数，而 v, w 是变化的；而在对应于 u 的坐标线中，u 是变化的，v, w 则是固定不变的。

下面在研究具体坐标系过程中，我们将分别研究各种具体坐标面的形状。

3-1-3 正交曲线坐标系概念和正交的条件

当三个坐标面或坐标线中的任意两个都相互垂直时，这样的坐标系就称为正交曲线坐标系。

两个坐标面正交指的是在任一交点处两个面的法线相互垂直。

两根坐标线正交指的是在交点处两根曲线的切线相互垂直。

现在先求导两坐标面相互正交的条件。令点 $P(x,y,z)$ 为任一交点，其曲线坐标相应为 u, v, w。这对应于三个坐标面：$u =$ 常数，$v =$ 常数，$w =$ 常数。由第二章矢量分析我们知道，垂直于坐标面

$$u = f(x,y,z)$$

的矢量函数是 u 的梯度，即

$$\text{grad}\boldsymbol{u}=\mathbf{i}\frac{\partial u}{\partial x}+\mathbf{j}\frac{\partial u}{\partial y}+\mathbf{k}\frac{\partial u}{\partial z}$$

垂直于坐标面

$$v=g(x,y,z)$$

的矢量是函数 v 的梯度，即

$$\text{grad}v=\mathbf{i}\frac{\partial v}{\partial x}+\mathbf{j}\frac{\partial v}{\partial y}+\mathbf{k}\frac{\partial v}{\partial z}$$

垂直于坐标面

$$w=h(x,y,z)$$

的矢量是函数 w 的梯度，即

$$\text{grad}w=\mathbf{i}\frac{\partial w}{\partial x}+\mathbf{j}\frac{\partial w}{\partial y}+\mathbf{k}\frac{\partial w}{\partial z}$$

由此可见，坐标面正交的条件实际上就是三个梯度两两互相垂直的条件。而矢量互相垂直的条件是点积等于零，即

$$\begin{cases}\text{grad}u\cdot\text{grad}v=0\\ \text{grad}u\cdot\text{grad}w=0\\ \text{grad}v\cdot\text{grad}w=0\end{cases}\tag{3-17}$$

用矢量的分量来表示的话，就是

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial v}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial y}\dfrac{\partial v}{\partial y}+\dfrac{\partial u}{\partial z}\dfrac{\partial v}{\partial z}=0\\ \dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial w}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial y}\dfrac{\partial w}{\partial y}+\dfrac{\partial u}{\partial z}\dfrac{\partial w}{\partial z}=0\\ \dfrac{\partial v}{\partial x}\dfrac{\partial w}{\partial x}+\dfrac{\partial v}{\partial y}\dfrac{\partial w}{\partial y}+\dfrac{\partial v}{\partial z}\dfrac{\partial w}{\partial z}=0\end{cases}\tag{3-18}$$

这是正交条件的一种形式。 它的特点是这里的 u,v,w 都表示成 x,y,z 的函数。

如果把 x,y,z 表示成 u,v,w 的函数，那末我们可以通过坐标线正交的条件导出正交条件的另一种形式，即在 (u,v,w) 点，切线元矢量是

$$d\mathbf{r} = \mathbf{i}dx + \mathbf{j}dy + \mathbf{k}dz$$

$$dx = \frac{\partial x}{\partial u}du + \frac{\partial x}{\partial v}dv + \frac{\partial x}{\partial w}dw$$

$$dy = \frac{\partial y}{\partial u}du + \frac{\partial y}{\partial v}dv + \frac{\partial y}{\partial w}dw$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial u}du + \frac{\partial z}{\partial v}dv + \frac{\partial z}{\partial w}dw$$

在u坐标线上，v，w都是常数，只有u是变量，因此 $dv = 0$，$dw = 0$，故对应于u坐标线的切线元矢量的三个分量是：

$$dx|_u = \frac{\partial x}{\partial u}du$$

$$dy|_u = \frac{\partial y}{\partial u}du$$

$$dz|_u = \frac{\partial z}{\partial u}du$$

这里"$|_u$"表示对应于u坐标线，即只有u为变量．同理对应于v坐标线的切线元矢量的三个分量是：

$$dx|_v = \frac{\partial x}{\partial v}dv$$

$$dy|_v = \frac{\partial y}{\partial v}dv$$

$$dz|_v = \frac{\partial z}{\partial v}dv$$

对应于w坐标线的切线元矢量的三个分量是：

$$dx|_w = \frac{\partial x}{\partial w}dw$$

$$dy|_w = \frac{\partial y}{\partial w}dw$$

$$dz|_w = \frac{\partial z}{\partial w}dw$$

由此得正交(三根坐标线两两相互垂直)的条件为

$$dx|_u dx|_v + dy|_u dy|_v + dz|_u dz|_v = 0$$

或

$$\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}\,dudv + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}\,dudv + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}\,dudv = 0$$

即

$$\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} = 0 \tag{3-19}$$

用同样的方法可得另外两个条件为

$$\begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial u}\dfrac{\partial x}{\partial w} + \dfrac{\partial y}{\partial u}\dfrac{\partial y}{\partial w} + \dfrac{\partial z}{\partial u}\dfrac{\partial z}{\partial w} = 0 \\ \dfrac{\partial x}{\partial v}\dfrac{\partial x}{\partial w} + \dfrac{\partial y}{\partial v}\dfrac{\partial y}{\partial w} + \dfrac{\partial z}{\partial v}\dfrac{\partial z}{\partial w} = 0 \end{cases} \tag{3-20}$$

注意，这里 x, y, z 表示成 u, v, w 的函数。

3-1-4 度量系数的概念

为了简化下文中的推导过程，现在引入度量系数的概念。

定义 度量系数 L_u, L_v, L_w 定义为下列三个量：

$$\begin{aligned} L_u &= \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2} = \sqrt{S\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2} \\ L_v &= \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2} = \sqrt{S\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2} \\ L_w &= \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial w}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial w}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial w}\right)^2} = \sqrt{S\left(\frac{\partial x}{\partial w}\right)^2} \end{aligned} \tag{3-21}$$

式中的 S 为求和的符号，对 x, y, z 求和。

3-1-5 用曲线坐标表示的长度元公式

令在空间有两个点 P_1 和 P_2. P_1 的直角坐标是 x, y, z；相应的曲线坐标是 u, v, w。P_2 的直角坐标是 $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$；相应的曲线坐标是 $u + du, v + dv, w + dw$。

大家知道，P_1 和 P_2 点之间的距离，是用一定长度单位来度

量线段 P_1P_2 后所得到的数，在直角坐标系中，可用下列公式表示：

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} \tag{3-22}$$

式中的 ds 表示 P_1P_2 之间的距离，dx, dy, dz 表示 P_1 和 P_2 点各直角坐标之差。

由于 u, v, w 只是数学上和 x, y, z 有关的三个数，在一般情况下不一定具有长度的几何意义，因此可以想像，在一般情况下用下列公式来表示长度 ds 是错误的：

$$ds = \sqrt{du^2 + dv^2 + dw^2}$$

我们的任务是从公式(3-22)出发，根据给定的 x, y, z 和u, v, w的关系，以及曲线坐标系为正交坐标系的条件，推导出数学上与式(3-22)恒等和以 u, v, w 表示的长度元公式。

大家知道，在直角坐标系中，如果曲线的参变量是 ξ，即

$$\begin{cases} x = x(\xi) \\ y = y(\xi) \\ z = z(\xi) \end{cases}$$

则无限短的长度元 ds 可写成

$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{dx}{d\xi}d\xi\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\xi}d\xi\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\xi}d\xi\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{dx}{d\xi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\xi}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\xi}\right)^2}\, d\xi \end{aligned} \tag{3-23}$$

由于 $x = x(u, v, w), y = y(u, v, w), z = z(u, v, w)$，且 x, y, z 是ξ 的函数，因此 u, v, w 也是ξ 的函数。因为

$$\frac{dx}{d\xi} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{du}{d\xi} + \frac{\partial x}{\partial v}\frac{dv}{d\xi} + \frac{\partial x}{\partial w}\frac{dw}{d\xi}$$

$$\frac{dy}{d\xi} = \frac{\partial y}{\partial u}\frac{du}{d\xi} + \frac{\partial y}{\partial v}\frac{dv}{d\xi} + \frac{\partial y}{\partial w}\frac{dw}{d\xi}$$

$$\frac{dz}{d\xi} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{du}{d\xi} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{dv}{d\xi} + \frac{\partial z}{\partial w}\frac{dw}{d\xi}$$

我们将此代入公式(3-23),得

$$
\begin{aligned}
ds^2 &= S\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{du}{d\xi}+\frac{\partial x}{\partial v}\frac{dv}{d\xi}+\frac{\partial x}{\partial w}\frac{dw}{d\xi}\right)^2 d\xi^2 \\
&= S\left[\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2\left(\frac{du}{d\xi}\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2\left(\frac{dv}{d\xi}\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial w}\right)^2\left(\frac{dw}{d\xi}\right)^2\right. \\
&\quad +2\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}\frac{du}{d\xi}\frac{dv}{d\xi}+\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial w}\frac{du}{d\xi}\frac{dw}{d\xi}\right. \\
&\quad \left.\left.+\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial w}\frac{dv}{d\xi}\frac{dw}{d\xi}\right)\right] d\xi^2 \\
&= \left\{S\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2\left(\frac{du}{d\xi}\right)^2+S\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2\left(\frac{dv}{d\xi}\right)^2\right. \\
&\quad +S\left(\frac{\partial x}{\partial w}\right)^2\left(\frac{dw}{d\xi}\right)^2 \\
&\quad +2\left[S\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}\right)\frac{du}{d\xi}\frac{dv}{d\xi}\right. \\
&\quad +S\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial w}\right)\frac{du}{d\xi}\frac{dw}{d\xi} \\
&\quad \left.\left.+S\left(\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial w}\right)\frac{dv}{d\xi}\frac{dw}{d\xi}\right]\right\} d\xi^2
\end{aligned}
\tag{3-24}
$$

根据度量系数的定义，$S\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2=L_u^2$，$S\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2=L_v^2$，

$S\left(\frac{\partial x}{\partial w}\right)^2=L_w^2$，而根据正交性的已知条件(3-19)和(3-20)：

$$
S\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}\right)=\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}=0
$$

$$
S\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial w}\right)=\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial w}+\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial w}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial w}=0
$$

$$
S\left(\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial w}\right)=\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial w}+\frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial w}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial w}=0
$$

于是(3-24)变为

$$ds^2 = L_u^2\left(\frac{du}{d\xi}d\xi\right)^2 + L_v^2\left(\frac{dv}{d\xi}d\xi\right)^2 + L_w^2\left(\frac{dw}{d\xi}d\xi\right)^2$$

$$= L_u^2du^2 + L_v^2dv^2 + L_w^2dw^2$$

最后得

$$ds = \sqrt{L_u^2du^2 + L_v^2dv^2 + L_w^2dw^2} \tag{3-25}$$

这就是我们所需要的表达式。

在对应于 u 的坐标线上，由于 $dv = 0$，$dw = 0$，因此长度元 ds_u 为

$$ds_u = L_u du \tag{3-26}$$

同理，对应于 v 坐标线的长度元 ds_v 为

$$ds_v = L_v dv \tag{3-27}$$

对应于 w 坐标线的长度元 ds_w 为

$$ds_w = L_w dw \tag{3-28}$$

3-1-6 体积元的定义及其表达式

定义 在正交曲线坐标系 u, v, w 内，区域 C 中一点 $P_0(u_0, v_0, w_0)$ 上的体积元 dV 定义为矩形六面体的体积，其六个面由通过 P_0 点及其附近的下列六个坐标面构成：

$$u = u_0, \qquad u = u_0 + du$$

$$v = v_0, \qquad v = v_0 + dv$$

$$w = w_0, \qquad w = w_0 + dw$$

如图 3-2 所示。

下列定理成立：

定理 在正交曲线坐标系中，体积元的表达式为

$$dV = L_u L_v L_w du dv dw \tag{3-29}$$

证明 因为矩形六面体各面互相垂直，所以其体积为相互垂直三边的乘积，即

$$dV = ds_u ds_v ds_w$$

但

$$ds_u = L_u du, \quad ds_v = L_v dv, \quad ds_w = L_w dw$$

故

$$dV = L_u L_v L_w du dv dw$$

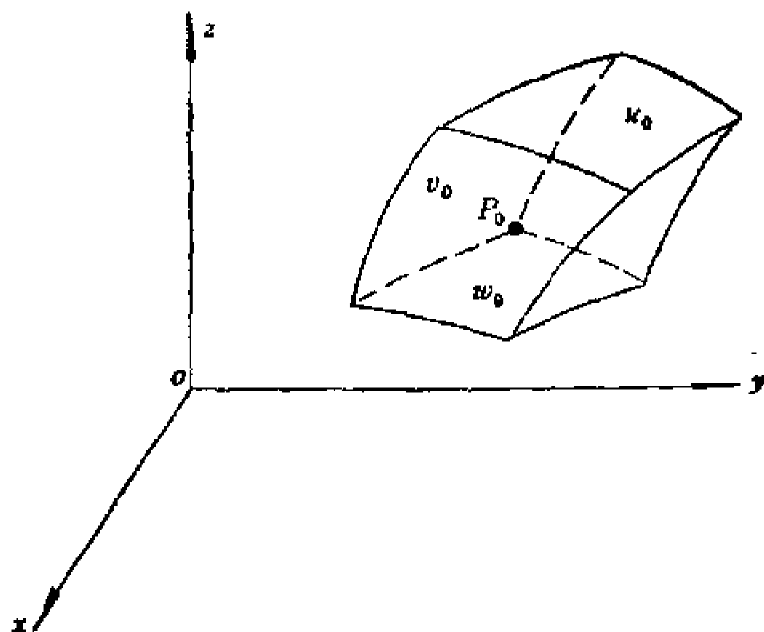


图 3-2 曲线坐标系中的体积元

3-1-7 曲面上的面积元

空间中的曲面可以通过方程

$$z = z(x, y) \tag{3-30}$$

表示，也可以通过参数方程组

$$\begin{cases} x = \varphi(u, v) \\ y = \psi(u, v) \\ z = \chi(u, v) \end{cases} \tag{3-31}$$

表示，因为从头两个方程中解出 u, v 并代入第三个方程后，我们就得到了 z 和 x, y 之间的关系(3-30)。

参数 u, v 可以看作是曲面上的点的曲线坐标，因为已知 u, v 后通过方程（3-31）我们就唯一地确定了曲面上的点的直角坐标 x, y, z。反之，如已知 x, y, z，则通过解方程（3-31）中的任意两式，我们就可确定相对应的 u, v。

曲面的一般表达式可写成

$$F(x, y, z) = 0$$

如果 x,y,z 都通过 u,v 表示，则 $F(x,y,z)=0$ 实际上是一个 u,v 的函数方程。

现求曲面上一点 (x,y,z) 的梯度的各分量 $\partial F/\partial x,\partial F/\partial y,\partial F/\partial z$ 的表达式。

因为曲面上的点 $F(x,y,z)=0$，即

$$\begin{aligned}F(x,y,z) &= F(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\\ &= F(u,v)=0\end{aligned}$$

故

$$\frac{\partial F}{\partial u}=0,$$

即

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u}=0 \tag{3-32}$$

同理，因 $\partial F/\partial v=0$，有

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v}=0 \tag{3-33}$$

将式(3-32)，(3-33)联立求解 $\frac{\partial F}{\partial x}$，$\frac{\partial F}{\partial y}$，得

$$\frac{\partial F}{\partial x}=-\frac{\begin{vmatrix}\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u}\\ \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u}\\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}}=-\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}}{\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}=-\frac{\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u}\\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u}\\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}}=-\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}}{\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}}$$

式中

$$\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v}\end{vmatrix},\quad \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v}\\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\end{vmatrix}$$

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}$$

分别称之为 (y,z),(z,x) 和 (x,y) 的雅可比行列式。由此可得梯度的三个分量是

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial x}=\dfrac{\partial F}{\partial z}\dfrac{\dfrac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}}{\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}}\\[2ex] \dfrac{\partial F}{\partial y}=\dfrac{\partial F}{\partial z}\dfrac{\dfrac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}}{\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}}\\[2ex] \dfrac{\partial F}{\partial z}=\dfrac{\partial F}{\partial z}\end{cases}$$

因为梯度的方向就是法线的方向，所以法线三个方向余弦的表达式为

$$\cos(n,x)=\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial F}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial F}{\partial y}\right)^2+\left(\dfrac{\partial F}{\partial z}\right)^2}}$$

$$=\frac{\dfrac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\right)^2+\left(\dfrac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\right)^2+\left(\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)^2}}\tag{3-34}$$

同理

$$\cos(n,y)=\frac{\dfrac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\right)^2+\left(\dfrac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\right)^2+\left(\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)^2}} \tag{3-35}$$

$$\cos(n,z)=\frac{\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\right)^2+\left(\dfrac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\right)^2+\left(\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)^2}} \tag{3-36}$$

有了以上的预备知识后，我们现在就来证明下列以 u,v 为自变量的曲面上面积元的表达式。

定理 在以曲面参数 u,v 作为自变量的曲线坐标系中，曲面上面积元 dS 的表达式为

$$\begin{aligned} dS &= \sqrt{EG-F^2}\,dudv \\ &= \sqrt{dS_{xy}^2+dS_{xz}^2+dS_{yz}^2} \end{aligned}$$

式中

$$E=\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2=S\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2$$

$$F=\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}=S\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}\right)$$

$$G=\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2=S\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2$$

而 $dS_{xy}, dS_{xz}, dS_{yz}$ 为面积元 dS 在 xy，xz，yz 坐标平面内的投影。

证明：令 dS 在 xy 平面上的投影为 dS_{xy}，则

$$dS_{xy}=dS\,|\cos(n,z)|$$

另一方面，根据微积分学中关于双重积分变量变换的理论，

$$dS_{xy}=\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|dudv$$

而 $\cos(n,z)$ 由公式(3-36)表示. 由此得

$$\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| dudv$$

$$= dS \frac{\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|}{\sqrt{\left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)^2}}$$

此处根号取正值. 约去 $\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|$ 后,得

$$dS = \sqrt{\left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)^2} \tag{3-37}$$

将根号内的三个雅可比行列式展开并平方相加,再和 $EG - F^2$的展开式相比较,可见

$$\left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)^2$$

$$= EG - F^2$$

因此最后得

$$dS = \sqrt{EG - F^2}\, dudv \tag{3-38}$$

引入下列符号:

$$l_u^2(x,y) = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2$$

$$l_u^2(x,z) = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2$$

$$l_u^2(y,z) = \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2$$

$$l_v^2(x,y) = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2$$

$$l_v^2(x,z) = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2$$

$$l_v^2(y,z)=\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2$$

则显然

$$E=\frac{1}{2}\left[l_u^2(x,y)+l_u^2(x,z)+l_u^2(y,z)\right]$$

$$G=\frac{1}{2}\left[l_v^2(x,y)+l_v^2(x,z)+l_v^2(y,z)\right]$$

$l(x,y),l(x,z),l(y,z)$ 分别表示在 xy，xz，yz 平面内的度量系数，而下标 u 或 v 则表示对哪一个曲线坐标求度量系数。

如果 $x=\varphi(u,v)$，$y=\psi(u,v)$，$z=\chi(u,v)$ 内的任一对关系式在相应的平面内组成正交曲线坐标系，即(见式(3-19)和(3-20))

$$\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}=0$$

$$\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}=0$$

$$\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}=0$$

将三式相加，得

$$2\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}\right)=0$$

即

$$F=0 \tag{3-39}$$

这是曲面上 u,v 坐标线正交的必要条件。反之，如$F=0$，则

$$dS=\sqrt{EG}\,dudv$$
$$=L_uL_vdudv$$

这只有在 u,v 坐标线为正交时才可能，因此 $F=0$ 又是曲面上曲线坐标系 u,v 为正交坐标系的充分条件。

下面考虑一个特殊情况。

假定 $u=x$，$v=y$，则

$$E=\left(\frac{\partial x}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2=1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2$$

同理

$$G=1+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2, \quad F=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}$$

因此

$$EG-F^2=\left(1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\right)\left(1+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right)-\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2$$

$$=1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2$$

于是

$$dS=\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dxdy \tag{3-40}$$

这是以直角坐标 (x,y,z) 表示的曲面上面积元的表达式。此外，

$$\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}=\frac{\partial(y,z)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix}0 & 1\\ \frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial y}\end{vmatrix}=-\frac{\partial z}{\partial x}$$

$$\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}=-\frac{\partial z}{\partial y}, \quad \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=1$$

于是方向余弦公式(3-34～3-36)变成

$$\begin{cases}\cos(n,x)=\dfrac{-\dfrac{\partial z}{\partial x}}{\sqrt{1+\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2}}\\[2ex] \cos(n,y)=\dfrac{-\dfrac{\partial z}{\partial y}}{\sqrt{1+\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2}}\\[2ex] \cos(n,z)=\dfrac{1}{\sqrt{1+\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2}}\end{cases} \tag{3-41}$$

顺便指出，曲面上的曲线线元可写成下列形式：

$$
\begin{aligned}
ds &= \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} \\
&= \sqrt{S\ \left(\frac{\partial x}{\partial u}du + \frac{\partial x}{\partial v}dv\right)^2} \\
&= \sqrt{S\ \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 du^2 + 2S\left(\frac{\partial x}{\partial u}\ \frac{\partial x}{\partial v}\right)dudv + S\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 dv^2} \\
&= \sqrt{E^2du^2 + 2Fdudv + Gdv^2} \qquad (3\text{-}42)
\end{aligned}
$$

3-1-8 以空间曲线坐标表示的曲面面积元公式

设在空间 $oxyz$ 中引入了正交曲线坐标系 u,v,w，即

$$
\begin{cases}
x = \varphi(u,v,w) \\
y = \psi(u,v,w) \\
z = \chi(u,v,w)
\end{cases} \qquad (3\text{-}43)
$$

现求用 u,v,w 表示的曲面面积元 dS 的表达式。

我们将从含有直角坐标 x,y,z 的表达式(3-38)，即

$$
dS = \sqrt{EG - F^2}\, d\xi d\eta \qquad (3\text{-}44)
$$

（因 u,v,w 已用作空间坐标符号，故曲面参数改用 ξ,η 表示）出发，式中，

$$
E = S\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^2
$$

$$
G = S\left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)^2
$$

$$
F = S\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\ \frac{\partial x}{\partial \eta}\right)
$$

再利用方程组(3-43)，通过数学变换，将式(3-44)中的 x,y,z 变换成 u,v,w 的函数。

首先

$$
\begin{aligned}
E &= S\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^2 \\
&= S\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial \xi}+\frac{\partial x}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial \xi}\right)^2 \\
&= S\left[\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2\left(\frac{\partial v}{\partial \xi}\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial w}\right)^2\left(\frac{\partial w}{\partial \xi}\right)^2\right. \\
&\quad +2\left(S\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}\cdot\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial v}{\partial \xi}\right)\right. \\
&\quad +S\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial w}\cdot\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial w}{\partial \xi}\right) \\
&\quad \left.\left.+S\left(\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial w}\frac{\partial v}{\partial \xi}\frac{\partial w}{\partial \xi}\right)\right)\right]
\end{aligned}
$$

利用正交性条件(3-19)和(3-10)，

$$
S\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}\right)=0,\quad S\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial w}\right)=0,\quad S\left(\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial w}\right)=0
$$

得

$$
E=L_u^2\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)^2+L_v^2\left(\frac{\partial v}{\partial \xi}\right)^2+L_w^2\left(\frac{\partial w}{\partial \xi}\right)^2
$$

同理

$$
G=S\left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)^2=L_u^2\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)^2+L_v^2\left(\frac{\partial v}{\partial \eta}\right)^2+L_w^2\left(\frac{\partial w}{\partial \eta}\right)^2
$$

对 F 有

$$
\begin{aligned}
F &= S\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\frac{\partial x}{\partial \eta}\right) \\
&= S\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial \xi}+\frac{\partial x}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial \xi}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial \eta}\right. \\
&\quad \left.+\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial \eta}+\frac{\partial x}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial \eta}\right) \\
&= S\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial u}{\partial \eta}+S\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2\frac{\partial v}{\partial \xi}\frac{\partial v}{\partial \eta} \\
&\quad +S\left(\frac{\partial x}{\partial w}\right)^2\frac{\partial w}{\partial \xi}\frac{\partial w}{\partial \eta}
\end{aligned}
$$

$$+ S\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial v}{\partial \eta}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial v}{\partial \xi}\right)$$

$$+ S\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial w}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial w}{\partial \eta}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial w}{\partial \xi}\right)$$

$$+ S\left(\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial w}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial \xi}\frac{\partial w}{\partial \eta}+\frac{\partial v}{\partial \eta}\frac{\partial w}{\partial \xi}\right)$$

利用正交条件和 L_u, L_v, L_w 的定义，得

$$F = L_u^2\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial u}{\partial \eta}+L_v^2\frac{\partial v}{\partial \xi}\frac{\partial v}{\partial \eta}+L_w^2\frac{\partial w}{\partial \xi}\frac{\partial w}{\partial \eta}$$

现在可将 $EG - F^2$ 计算如下：

$$\begin{aligned}
EG - F^2 &= \left[L_u^2\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)^2+L_v^2\left(\frac{\partial v}{\partial \xi}\right)^2+L_w^2\left(\frac{\partial w}{\partial \xi}\right)^2\right] \\
&\quad \cdot\left[L_u^2\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)^2+L_v^2\left(\frac{\partial v}{\partial \eta}\right)^2+L_w^2\left(\frac{\partial w}{\partial \eta}\right)^2\right] \\
&\quad -\left(L_u^2\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial u}{\partial \eta}+L_v^2\frac{\partial v}{\partial \xi}\frac{\partial v}{\partial \eta}+L_w^2\frac{\partial w}{\partial \xi}\frac{\partial w}{\partial \eta}\right)^2 \\
&= (L_uL_v)^2\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial v}{\partial \eta}-\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial v}{\partial \xi}\right)^2 \\
&\quad +(L_uL_w)^2\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial w}{\partial \eta}-\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial w}{\partial \xi}\right)^2 \\
&\quad +(L_vL_w)^2\left(\frac{\partial v}{\partial \xi}\frac{\partial w}{\partial \eta}-\frac{\partial v}{\partial \eta}\frac{\partial w}{\partial \xi}\right)^2 \\
&= (L_uL_v)^2\left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(\xi,\eta)}\right|^2+(L_uL_w)^2\left|\frac{\partial(u,w)}{\partial(\xi,\eta)}\right|^2 \\
&\quad +(L_vL_w)^2\left|\frac{\partial(v,w)}{\partial(\xi,\eta)}\right|^2
\end{aligned}$$

代入式(3-44)得

$$dS = \sqrt{EG - F^2}\, d\xi d\eta$$

$$= \sqrt{\begin{aligned}&\left[(L_uL_v)\left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(\xi,\eta)}\right|d\xi d\eta\right]^2\\&\quad+\left[(L_uL_w)\left|\frac{\partial(u,w)}{\partial(\xi,\eta)}\right|d\xi d\eta\right]^2\\&\quad+\left[(L_vL_w)\left|\frac{\partial(v,w)}{\partial(\xi,\eta)}\right|d\xi d\eta\right]^2\end{aligned}} \tag{3-45}$$

但根据二重积分变量变换理论，u,v 平面内的面积元

$$dudv = \left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(\xi,\eta)}\right|d\xi d\eta \tag{3-46}$$

u,w 平面内的面积元

$$dudw = \left|\frac{\partial(u,w)}{\partial(\xi,\eta)}\right|d\xi d\eta \tag{3-47}$$

v,w 平面内的面积元

$$dvdw = \left|\frac{\partial(v,w)}{\partial(\xi,\eta)}\right|d\xi d\eta \tag{3-48}$$

由此最后得

$$dS = \sqrt{(L_uL_vdudv)^2+(L_uL_wdudw)^2+(L_vL_wdvdw)^2} \tag{3-49}$$

这就是我们所需要的以 u,v,w 为自变量的曲面面积元表达式。

下面考虑一个特殊情况。

如 $u=\xi$，$v=\eta$，而 $w=w(u,v)=w(\xi,\eta)$，也就是当曲面方程给定为 $w=w(u,v)$ 时，我们看看这时 dS 的表达式是什么。

在给定条件下，

$$\begin{aligned}dudw &= \left|\frac{\partial(u,w)}{\partial(\xi,\eta)}\right|d\xi d\eta = \left|\frac{\partial(u,w)}{\partial(u,v)}\right|dudv\\&= \left|\frac{\partial w}{\partial v}\right|dudv\end{aligned}$$

因这时 $\frac{\partial u}{\partial v}=0,\frac{\partial u}{\partial u}=1$。同理，

$$dvdw = \left|\frac{\partial(v,w)}{\partial(\xi,\eta)}\right| d\xi d\eta = \left|\frac{\partial(v,w)}{\partial(u,v)}\right| dudv = \left|\frac{\partial w}{\partial u}\right| dudv$$

代入式(3-49),得

$$dS = \sqrt{(L_u L_v)^2 + (L_u L_w)^2 \left(\frac{\partial w}{\partial v}\right)^2 + (L_v L_w)^2 \left(\frac{\partial w}{\partial u}\right)^2}\, dudv \tag{3-50}$$

这就是当曲面方程给定为

$$w = w(u,v)$$

时的 dS 表达式。

和式(3-49)相比较,可以看出，在式(3-50)中通过 $\frac{\partial w}{\partial v}$, $\frac{\partial w}{\partial u}$ 明显地反映出了曲面的特征。而在式(3-49)中曲面的特征没有明显地反映出来,仅仅在对具体曲面进行面积分时通过 u, v, w 的变化才看得出曲面特征的影响。在式(3-49)中，L_u,L_v,L_w 仅仅反映曲面坐标系的特征。这一点在式(3-50)中也有反映。至此我们有了研究具体曲线坐标系的预备知识。从下一节开始我们将对常用的空间正交曲线坐标系进行系统的分析。

3-2 常用的空间正交曲线坐标系

在这一节中,我们分别对 13 种常用的空间正交曲线坐标系进行研究。研究的思路是一样的,即首先给出 x,y,z 和 u,v,w 的关系式,然后用正交性条件检验坐标系是不是正交坐标系,再利用度量系数的表达式具体地计算 L_u,L_v,L_w 的公式。为了方便起见,对各种坐标系统的推导都是相互独立进行的,读者可直接查阅所需了解的曲线坐标系,而不需相互引证,也不需从头到尾阅读所有坐标系的材料。考虑到习惯上各坐标系内的自变量不一定必须用 u,v,w 表示,因此在每一种坐标系的开始，先给出 u,v,w 的惯用符号,以便于阅读其他材料。

(1) 直角坐标系(图 3-3)

在直角坐标系中，

$$\begin{cases} x = u & -\infty < x < +\infty \\ y = v & -\infty < y < +\infty \\ z = w & -\infty < z < +\infty \end{cases} \tag{3-51}$$

正交性：

$$\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} = 1\times 0 + 0\times 1 + 0\times 0 = 0$$

$$\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial w} + \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial w} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial w} = 0\times 0 + 1\times 0 + 0\times 1 = 0$$

$$\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial w} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial w} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial w} = 1\times 0 + 0\times 0 + 0\times 1 = 0$$

故直角坐标系为正交坐标系。

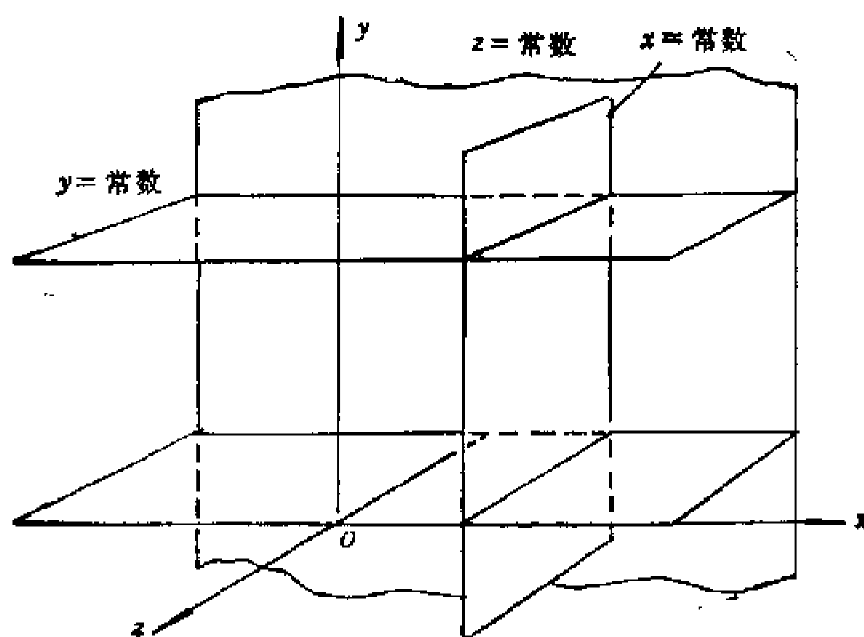


图 3-3 直角坐标系

坐标面：

$$x = \text{常数}, \qquad y = \text{常数}, \qquad z = \text{常数}$$

它们是三个相互垂直的平面。

度量系数：

$$L_u = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2}$$

$$= \sqrt{1+0+0} = 1$$

$$L_v = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2} = \sqrt{0+1+0} = 1$$

$$L_w = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial w}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial w}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial w}\right)^2} = \sqrt{0+0+1} = 1$$

(2) 圆柱面坐标系(图 3-4)

在圆柱面坐标系中，惯用的符号是 $u = r, v = \psi, w = z$。

x, y, z 和 r, ψ, z 的关系是：

$$\begin{cases} x = r\cos\psi & 0 \leqslant r < \infty \\ y = r\sin\psi & 0 \leqslant \psi < 2\pi \\ z = z & -\infty < z < +\infty \end{cases} \tag{3-52}$$

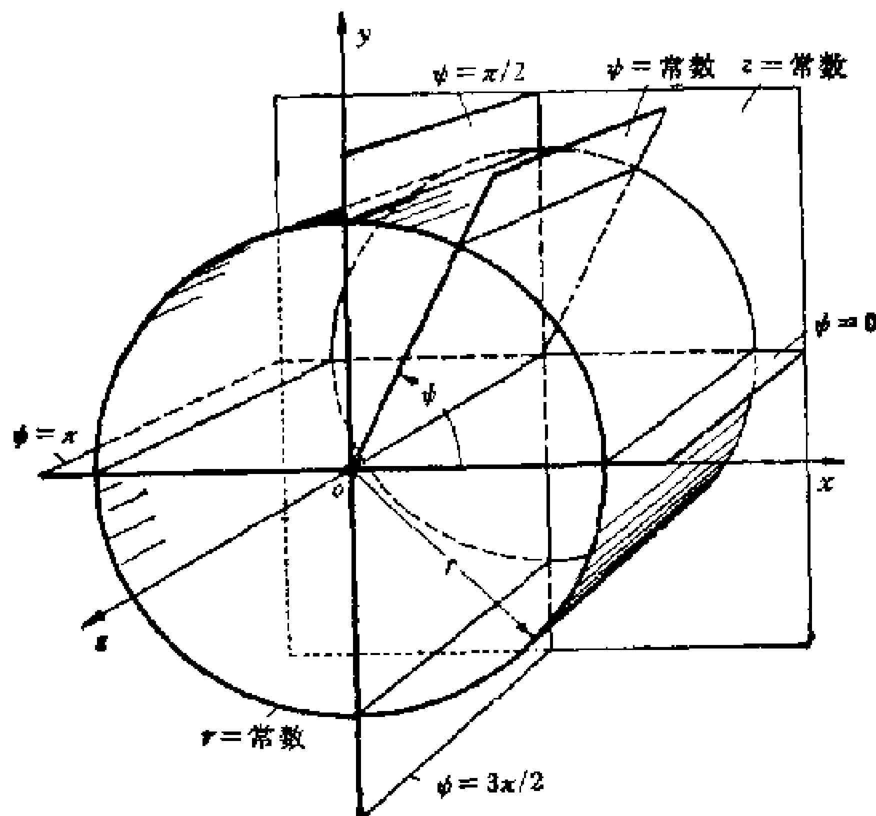


图 3-4　圆柱面坐标系

坐标面:

当 $r=$ 常数时，$x^2+y^2=r^2=$ 常数

这是一个圆柱面.

当 $\phi=$ 常数时，

$$y/x=\operatorname{tg}\phi=\text{常数}$$

由式(3-52)可知这是一个半平面.

当 $z=$ 常数时,这是一个平面.

所有这些坐标面都画在图 3-4 中.

正交性:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}\\
&\quad=\frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial x}{\partial \phi}+\frac{\partial y}{\partial r}\frac{\partial y}{\partial \phi}+\frac{\partial z}{\partial r}\frac{\partial z}{\partial \phi}\\
&\quad=\cos\phi\cdot(-r\sin\phi)+\sin\phi(r\cos\phi)+0\\
&\quad=0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial w}+\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial w}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial w}\\
&\quad=\frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial x}{\partial z}+\frac{\partial y}{\partial r}\frac{\partial y}{\partial z}+\frac{\partial z}{\partial r}\frac{\partial z}{\partial z}\\
&\quad=0+0+0=0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial w}+\frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial w}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial w}\\
&\quad=\frac{\partial x}{\partial \phi}\frac{\partial x}{\partial z}+\frac{\partial y}{\partial \phi}\frac{\partial y}{\partial z}+\frac{\partial z}{\partial \phi}\frac{\partial z}{\partial z}=0+0+0=0
\end{aligned}$$

故圆柱面坐标系为正交坐标系.

度量系数:

$$\begin{aligned}
L_u&=\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2}\\
&=\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2}
\end{aligned}$$

$$= \sqrt{\cos^2\psi + \sin^2\psi + 0} = 1$$

同理

$$L_v = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \psi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \psi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \psi}\right)^2}$$

$$= \sqrt{r^2\sin^2\psi + r^2\cos^2\psi + 0} = r$$

$$L_w = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial w}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial w}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial w}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial z}\right)^2}$$

$$= \sqrt{0 + 0 + 1} = 1$$

(3) 球面坐标系(图 3-5)

在此坐标系中,惯用的符号是 $u = r, v = \theta, w = \phi$。

x, y, z 和 $r, \theta\phi$ 的关系是:

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\phi & 0 \leqslant r < \infty \\ y = r\sin\theta\sin\phi & 0 \leqslant \theta \leqslant \pi \\ z = r\cos\theta & 0 \leqslant \phi < 2\pi \end{cases} \tag{3-53}$$

坐标面:

当 $r =$ 常数时,

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2 = \text{常数}$$

这是一个球面。

当 $\theta =$ 常数时,

$$\frac{(x^2 + y^2)^{1/2}}{z} = \operatorname{tg}\theta = \text{常数} = c$$

即

$$x^2 + y^2 = cz^2$$

由立体解析几何知这是一个以原点为顶点的圆锥面。

当 $\phi =$ 常数时,

$$y/x = \mathrm{tg}\,\psi = 常数$$

由式(3-35)可看出，这是一个半平面。所有这些坐标面都画在图3-5中。

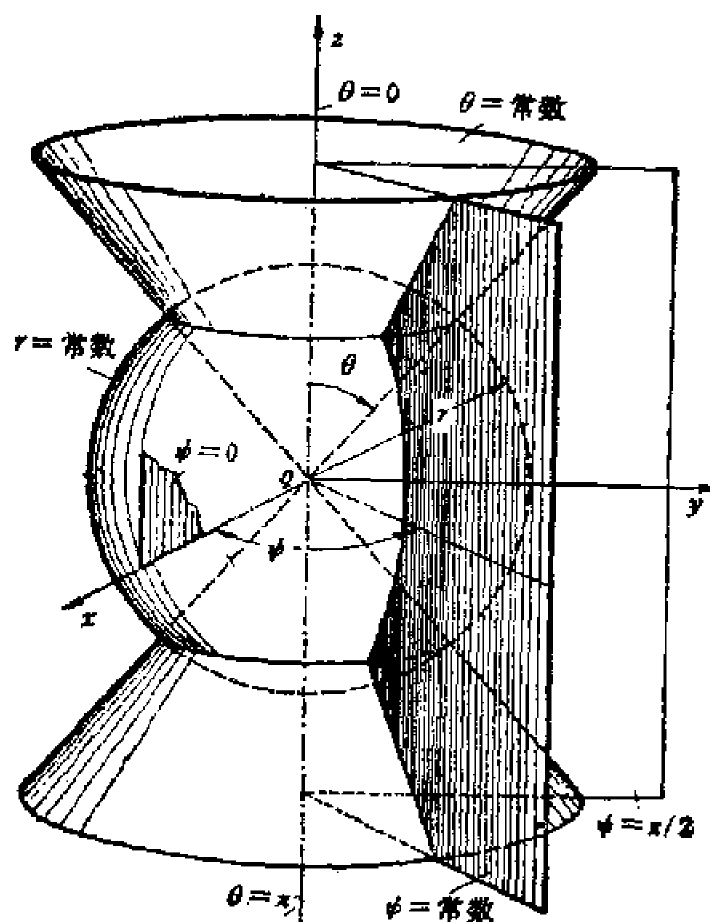


图 3-5 球面坐标系

正交性：

$$\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}$$

$$= r\cos^2\psi\sin\theta\cos\theta + r\sin^2\psi\sin\theta\cos\theta - r\sin\theta\cos\theta$$

$$= 0$$

$$\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial w}+\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial w}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial w}$$

$$= -r\sin^2\theta\sin\psi\cos\psi + r\sin^2\theta\sin\psi\cos\psi = 0$$

$$\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial w}+\frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial w}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial w}$$

$$= -r^2\sin\theta\cos\theta\sin\phi\cos\phi + r^2\sin\theta\cos\theta\sin\phi\cos\phi$$
$$= 0$$

故球坐标系为正交坐标系。

度量系数：

$$L_u = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2}$$
$$= \sqrt{\cos^2\phi\sin^2\theta + \sin^2\phi\sin^2\theta + \cos^2\theta}$$
$$= 1$$

$$L_v = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2}$$
$$= \sqrt{r^2\cos^2\phi\cos^2\theta + r^2\sin^2\phi\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta}$$
$$= r$$

$$L_w = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial w}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial w}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial w}\right)^2}$$
$$= \sqrt{r^2\sin^2\phi\sin^2\theta + r^2\cos^2\phi\sin^2\theta}$$
$$= r\sin\theta$$

(4) 椭圆柱面坐标系(图 3-6)

在此坐标系中，惯用的符号是 $u = \eta$，$v = \phi$，$w = z$。

x, y, z 和 η, ϕ, z 的关系是:

$$\begin{cases} x = a\operatorname{ch}\eta\cos\phi & 0 \leqslant \eta < \infty \\ y = a\operatorname{sh}\eta\sin\phi & 0 \leqslant \phi < 2\pi \\ z = z & -\infty < z < +\infty \end{cases} \tag{3-54}$$

坐标面:

当 $\eta =$ 常数时，

$$\left(\frac{x}{a\operatorname{ch}\eta}\right)^2 + \left(\frac{y}{a\operatorname{sh}\eta}\right)^2 = 1$$

这是一个椭圆柱面。

当 $\phi =$ 常数时，

$$\left(\frac{x}{a\cos\psi}\right)^2-\left(\frac{y}{a\sin\psi}\right)^2=1$$

这是一个双曲柱面。

当 $z=$ 常数时，这是一个平面。所有这些坐标面都画在图 3-6 中。

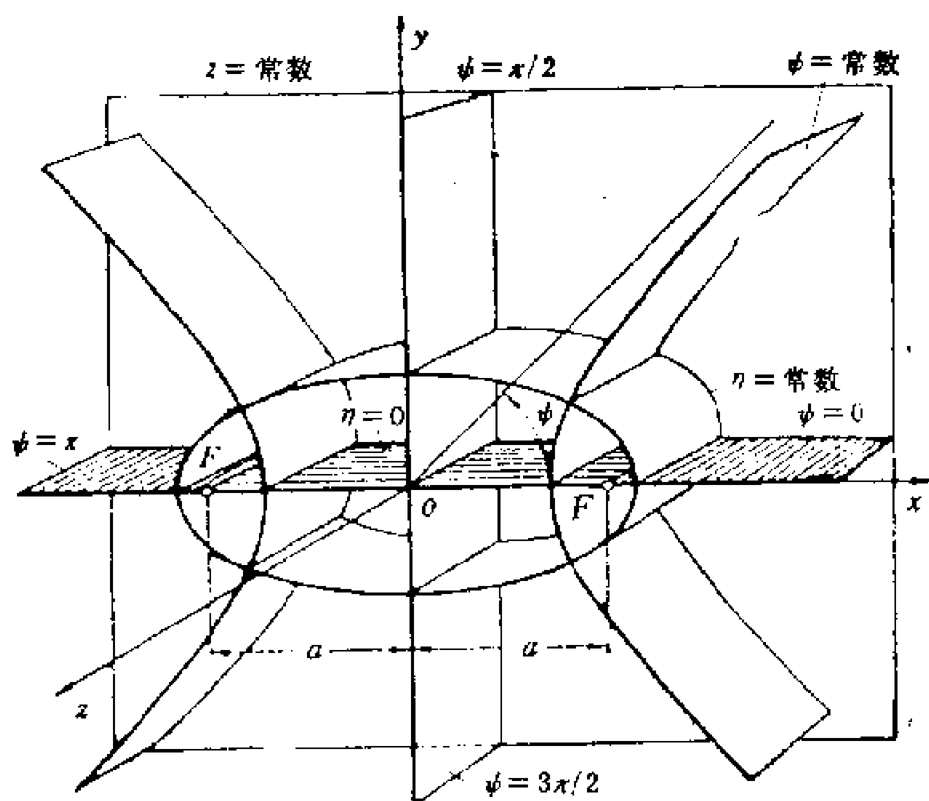


图 3-6 椭圆柱面坐标系.

正交性:

$$\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}$$

$$=\frac{\partial x}{\partial\eta}\frac{\partial x}{\partial\psi}+\frac{\partial y}{\partial\eta}\frac{\partial y}{\partial\psi}+\frac{\partial z}{\partial\eta}\frac{\partial z}{\partial\psi}$$

$$=a\,\mathrm{sh}\eta\cos\psi\cdot a\,\mathrm{ch}\eta(-\sin\psi)+a\,\mathrm{ch}\eta\sin\psi\cdot a\,\mathrm{sh}\eta\cos\psi+0$$

$$=0$$

$$\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial w}+\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial w}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial w}$$

$$=\frac{\partial x}{\partial\eta}\frac{\partial x}{\partial z}+\frac{\partial y}{\partial\eta}\frac{\partial y}{\partial z}+\frac{\partial z}{\partial\eta}\frac{\partial z}{\partial z}=0$$

$$\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial w}+\frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial w}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial w}$$

$$=\frac{\partial x}{\partial \psi}\frac{\partial x}{\partial z}+\frac{\partial y}{\partial \psi}\frac{\partial y}{\partial z}+\frac{\partial z}{\partial \psi}\frac{\partial z}{\partial z}=0$$

故椭圆柱面坐标系为正交坐标系。

度量系数：

$$L_u=\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial \eta}\right)^2}$$

$$=\sqrt{a^2\mathrm{sh}^2\eta\cos^2\psi+a^2\mathrm{ch}^2\eta\sin^2\psi}$$

$$=a\sqrt{\mathrm{ch}^2\eta\cos^2\psi-\cos^2\psi+\mathrm{ch}^2\eta\sin^2\psi}$$

$$=a\sqrt{\mathrm{ch}^2\eta-\cos^2\psi}$$

$$L_v=\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \psi}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial \psi}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial \psi}\right)^2}$$

$$=\sqrt{a^2\mathrm{ch}^2\eta\sin^2\psi+a^2\mathrm{sh}^2\eta\cos^2\psi}$$

$$=a\sqrt{\mathrm{ch}^2\eta-\cos^2\psi}$$

$$L_w=\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial z}\right)^2}=1$$

(5) 抛物柱面坐标系(图 3-7)

在此坐标系中，惯用的符号是 $u=\mu$, $v=\nu$, $w=z$。

x,y,z 与 μ,ν,z 的关系是：

$$\begin{cases} x=\dfrac{1}{2}(\mu^2-\nu^2) & 0\leqslant\mu<+\infty \\ y=\mu\nu & -\infty<\nu<+\infty \\ z=z & -\infty<z<+\infty \end{cases} \tag{3-55}$$

坐标面：

当 $\mu=$ 常数时，

$$y^2=\mu^2(\mu^2-2x)$$

这是一个抛物柱面。

当 $\nu=$ 常数时，

$$y^2 = \nu^2(\nu^2 + 2x)$$

这也是一个抛物柱面。

当 $z =$ 常数时，这是一个平面。所有这些坐标面都画在图3-7中。

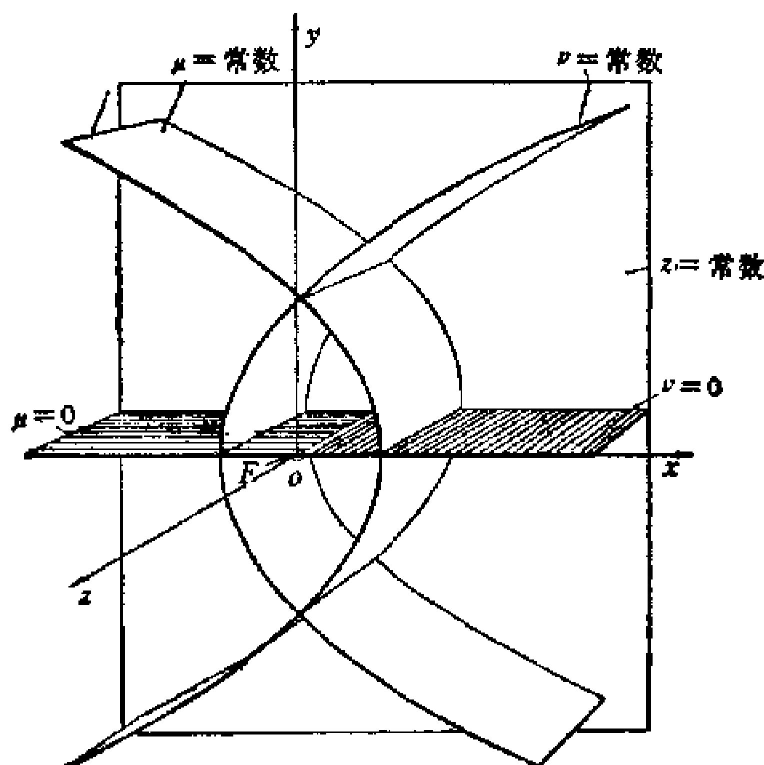


图 3-7 抛物柱面坐标系

正交性:

$$\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}$$

$$= \frac{\partial x}{\partial \mu}\frac{\partial x}{\partial \nu} + \frac{\partial y}{\partial \mu}\frac{\partial y}{\partial \nu} + \frac{\partial z}{\partial \mu}\frac{\partial z}{\partial \nu}$$

$$= -\mu\nu + \mu\nu + 0 = 0$$

$$\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial w} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial w} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial w}$$

$$= \frac{\partial x}{\partial \mu}\frac{\partial x}{\partial z} + \frac{\partial y}{\partial \mu}\frac{\partial y}{\partial z} + \frac{\partial z}{\partial \mu}\frac{\partial z}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial w} + \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial w} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial w}$$

$$= \frac{\partial x}{\partial \nu}\frac{\partial x}{\partial z} + \frac{\partial y}{\partial \nu}\frac{\partial y}{\partial z} + \frac{\partial z}{\partial \nu}\frac{\partial z}{\partial z} = 0$$

故抛物柱面坐标系为正交坐标系。

度量系数：

$$L_u = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \mu}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \mu}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \mu}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\mu^2 + \nu^2}$$

$$L_v = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \nu}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \nu}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \nu}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\nu^2 + \mu^2}$$

$$L_w = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial z}\right)^2}$$

$$= 1$$

(6) 长椭球面坐标系(图 3-8)

在此坐标系中，惯用的符号是 $u = \eta, v = \theta,\ w = \phi$，$x, y, z$ 与 η, θ, ϕ 的关系是：

$$\begin{cases} x = a\,\mathrm{sh}\eta \sin\theta\cos\phi & 0 \leqslant \eta < \infty \\ y = a\,\mathrm{sh}\eta \sin\theta\sin\phi & 0 \leqslant \theta \leqslant \pi \\ z = a\,\mathrm{ch}\eta\cos\theta & 0 \leqslant \phi < 2\pi \end{cases} \tag{3-56}$$

坐标面：

当 $\eta =$ 常数时，

$$\frac{x^2}{a^2\mathrm{sh}^2\eta} + \frac{y^2}{a^2\mathrm{sh}^2\eta} + \frac{z^2}{a^2\mathrm{ch}^2\eta} = 1$$

这是一个长椭球面。

当 $\theta =$ 常数时，

$$-\frac{x^2}{a^2\sin^2\theta} - \frac{y^2}{a^2\sin^2\theta} + \frac{z^2}{a^2\cos^2\theta} = 1$$

这是一个双叶双曲面。

当 $\phi =$ 常数时，

$$y/x = \operatorname{tg}\phi$$

由式(3-56)知，这是一个半平面。所有这些坐标面都画在图 3-8 中。

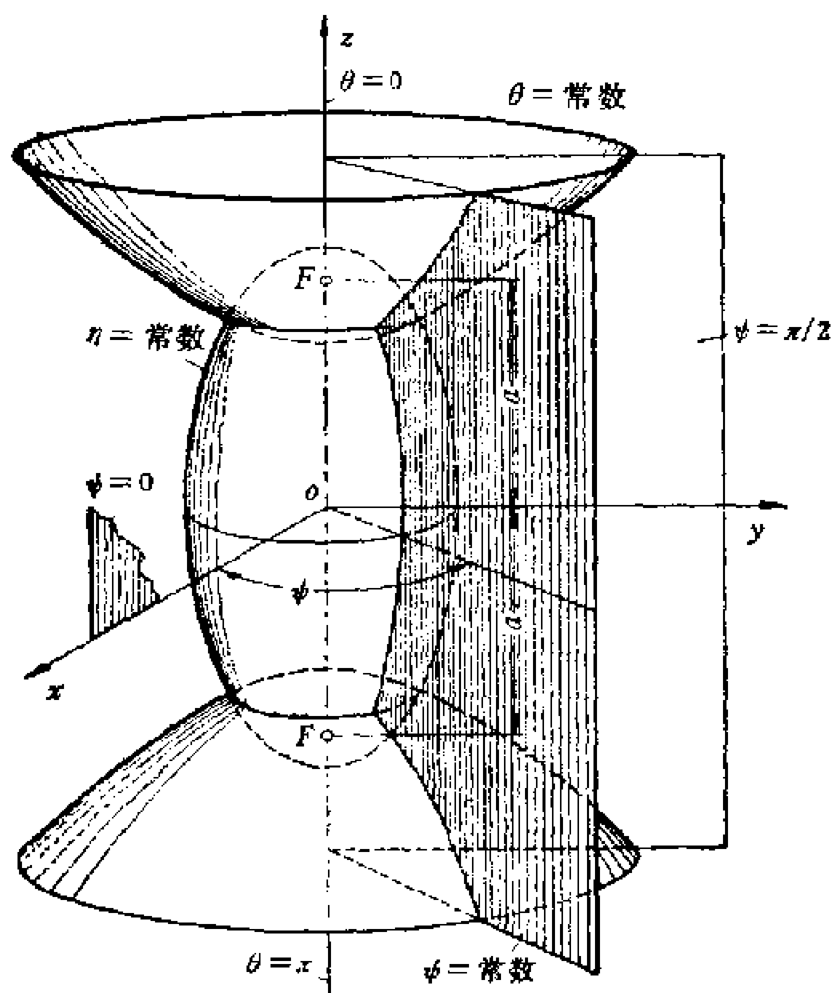


图 3-8 长椭球面坐标系

正交性：

$$\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}$$

$$=\frac{\partial x}{\partial \eta}\frac{\partial x}{\partial \theta}+\frac{\partial y}{\partial \eta}\frac{\partial y}{\partial \theta}+\frac{\partial z}{\partial \eta}\frac{\partial z}{\partial \theta}$$

$$=(a\operatorname{ch}\eta\cos\phi\sin\theta)(a\operatorname{sh}\eta\cos\phi\cos\theta)$$

$$+(a\operatorname{ch}\eta\sin\phi\sin\theta)(a\operatorname{sh}\eta\sin\phi\cos\theta)$$

$$+(a\operatorname{sh}\eta\cos\theta)(-a\operatorname{ch}\eta\sin\theta)$$

$$=0$$

$$\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial w}+\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial w}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial w}$$

$$=\frac{\partial x}{\partial \eta}\frac{\partial x}{\partial \phi}+\frac{\partial y}{\partial \eta}\frac{\partial y}{\partial \phi}+\frac{\partial z}{\partial \eta}\frac{\partial z}{\partial \phi}$$

$$=(a\operatorname{ch}\eta\sin\theta\cos\phi)(-a\operatorname{sh}\eta\sin\theta\sin\phi)$$

$$+(a\operatorname{ch}\eta\sin\theta\sin\phi)(a\operatorname{sh}\eta\sin\theta\cos\phi)$$

$$=0$$

$$\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial w}+\frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial w}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial w}$$

$$=\frac{\partial x}{\partial \theta}\frac{\partial x}{\partial \phi}+\frac{\partial y}{\partial \theta}\frac{\partial y}{\partial \phi}+\frac{\partial z}{\partial \theta}\frac{\partial z}{\partial \phi}$$

$$=(a\operatorname{sh}\eta\cos\theta\cos\phi)(-a\operatorname{sh}\eta\sin\theta\sin\phi)$$

$$+(a\operatorname{sh}\eta\cos\theta\sin\phi)(a\operatorname{sh}\eta\sin\theta\cos\phi)$$

$$=0$$

故长椭球面坐标系为正交坐标系。

度量系数：

$$L_u=\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial \eta}\right)^2}$$

$$=\sqrt{a^2\operatorname{ch}^2\eta\sin^2\theta\cos^2\phi+a^2\operatorname{ch}^2\eta\sin^2\theta\sin^2\phi+a^2\operatorname{sh}^2\eta\cos^2\theta}$$

$$=a\sqrt{\operatorname{ch}^2\eta\sin^2\theta+\operatorname{sh}^2\eta\cos^2\theta}$$

$$=a\sqrt{\operatorname{sh}^2\eta+\sin^2\theta}$$

$$L_v=\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \theta}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial \theta}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2}$$

$$=a\sqrt{\operatorname{sh}^2\eta\cos^2\theta\cos^2\phi+\operatorname{sh}^2\eta\cos^2\theta\sin^2\phi+\operatorname{ch}^2\eta\sin^2\theta}$$

$$=a\sqrt{\operatorname{sh}^2\eta+\sin^2\theta}$$

$$L_w=\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \phi}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial \phi}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial \phi}\right)^2}$$

$$=a\sqrt{\operatorname{sh}^2\eta\sin^2\theta\sin^2\phi+\operatorname{sh}^2\eta\sin^2\theta\cos^2\phi}$$

$= a\text{sh}\eta \sin\theta$

(7) 扁椭球面坐标系(图 3-9)

在此坐标系中,惯用的符号是 $u = \eta, v = \theta, w = \psi$.

x, y, z 与 η, θ, ψ 的关系是:

$$\begin{cases} x = a\text{ch}\eta \sin\theta \cos\psi & 0 \leqslant \eta < \infty \\ y = a\text{ch}\eta \sin\theta \sin\psi & 0 \leqslant \theta \leqslant \pi \\ z = a\text{sh}\eta \cos\theta & 0 \leqslant \psi < 2\pi \end{cases} \tag{3-57}$$

坐标面:

当 $\eta =$ 常数时,

$$\frac{x^2}{a^2\text{ch}^2\eta} + \frac{y^2}{a^2\text{ch}^2\eta} + \frac{z^2}{a^2\text{sh}^2\eta} = 1$$

这是一个扁椭球面.

当 $\theta =$ 常数时,

$$\frac{x^2}{a^2\sin^2\theta} + \frac{y^2}{a^2\sin^2\theta} - \frac{z^2}{a^2\cos^2\theta} = 1$$

这是一个单叶双曲面.

当 $\psi =$ 常数时,

$$\frac{y}{x} = \text{tg}\,\psi = \text{常数}$$

由式(3-57)知，这是一个半平面. 所有这些坐标面都画在图 3- 9 中.

正交性:

$$\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}$$

$$= \frac{\partial x}{\partial \eta}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial y}{\partial \eta}\frac{\partial y}{\partial \theta} + \frac{\partial z}{\partial \eta}\frac{\partial z}{\partial \theta}$$

$$= a\text{sh}\eta \cos\psi \sin\theta \cdot a\text{ch}\eta \cos\psi \cos\theta$$

$$+ a\text{sh}\eta \sin\psi \sin\theta \cdot a\text{ch}\eta \sin\psi \cos\theta$$

$$+ a\text{ch}\eta \cos\theta(-a\text{sh}\eta \sin\theta)$$

$$= 0$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial w}+\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial w}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial w}\\
&\quad=\frac{\partial x}{\partial \eta}\frac{\partial x}{\partial \psi}+\frac{\partial y}{\partial \eta}\frac{\partial y}{\partial \psi}+\frac{\partial z}{\partial \eta}\frac{\partial z}{\partial \psi}\\
&\quad=a\mathrm{sh}\eta\cos\psi\sin\theta\cdot(-a\mathrm{ch}\eta\sin\psi\sin\theta)\\
&\qquad+a\mathrm{sh}\eta\sin\psi\sin\theta(a\mathrm{ch}\eta\cos\psi\sin\theta)+0\\
&\quad=0
\end{aligned}
$$

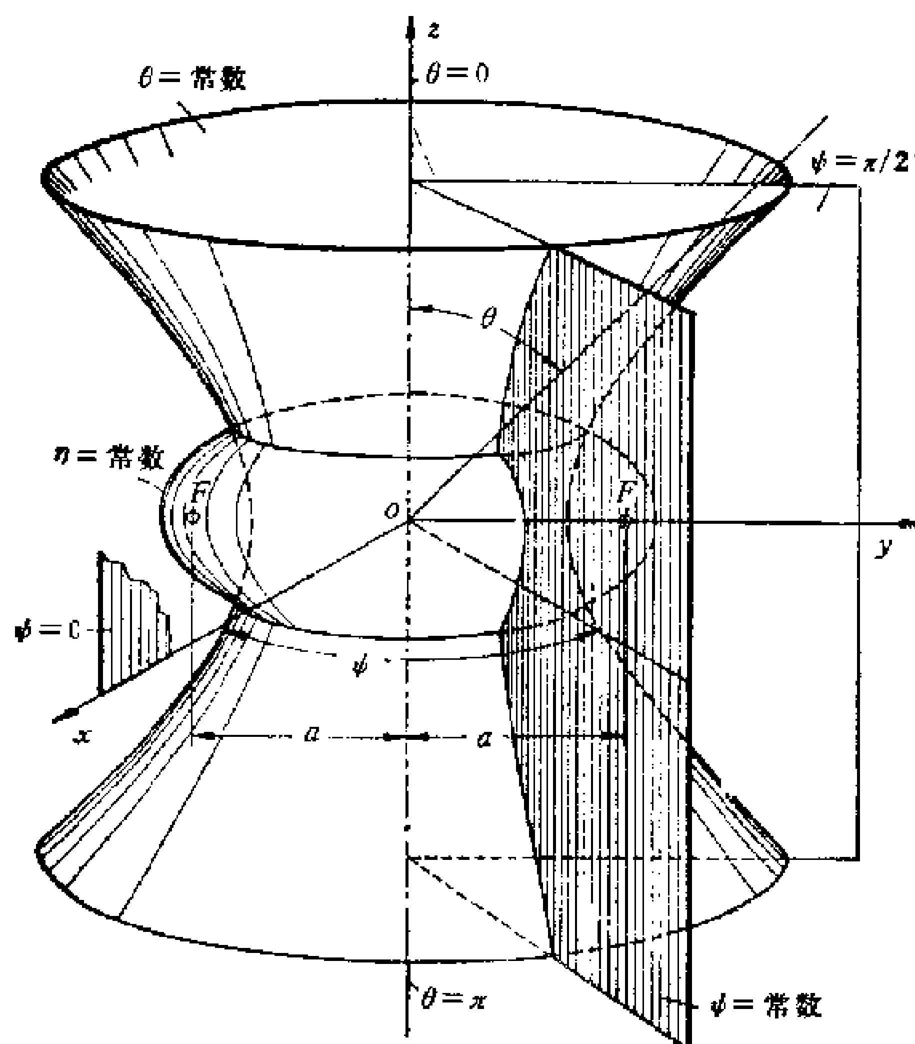


图 3-9　扁椭球面坐标系

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial w}+\frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial w}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial w}\\
&\quad=\frac{\partial x}{\partial \theta}\frac{\partial x}{\partial \psi}+\frac{\partial y}{\partial \theta}\frac{\partial y}{\partial \psi}+\frac{\partial z}{\partial \theta}\frac{\partial z}{\partial \psi}\\
&\quad=a\mathrm{ch}\eta\cos\theta\cos\psi\cdot(-a\mathrm{ch}\eta\sin\theta\sin\psi)
\end{aligned}
$$

$$+(a\,\mathrm{ch}\eta\cos\theta\sin\psi)(a\,\mathrm{ch}\eta\sin\theta\cos\psi)+0$$

$$=0$$

故扁椭球面坐标系为正交坐标系。

度量系数:

$$L_{\eta}=\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial\eta}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\eta}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\eta}\right)^2}$$

$$=a\sqrt{\mathrm{sh}^2\eta\sin^2\theta\cos^2\psi+\mathrm{sh}^2\eta\sin^2\theta\sin^2\psi+\mathrm{ch}^2\psi\cos^2\theta}$$

$$=a\sqrt{\mathrm{ch}^2\eta-\sin^2\theta}$$

$$=a\sqrt{\mathrm{sh}^2\eta+\cos^2\theta}$$

$$L_{\theta}=\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial\theta}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\theta}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\theta}\right)^2}$$

$$=a\sqrt{\mathrm{ch}^2\eta\cos^2\theta\cos^2\psi+\mathrm{ch}^2\eta\cos^2\theta\sin^2\psi+\mathrm{sh}^2\eta\sin^2\theta}$$

$$=a\sqrt{\mathrm{sh}^2\eta+\cos^2\theta}$$

$$=a\sqrt{\mathrm{ch}^2\eta-\sin^2\theta}$$

(8) 抛物面坐标系(图 3-10)

在此坐标系中,惯用的符号是 $u=\mu, v=\nu, w=\phi$。

x, y, z 与 μ, ν, ϕ 的关系是:

$$\begin{cases} x=\mu\nu\cos\phi & 0\leqslant\mu<\infty \\ y=\mu\nu\sin\phi & 0\leqslant\nu<\infty \\ z=\dfrac{1}{2}(\mu^2-\nu^2) & 0\leqslant\phi<2\pi \end{cases} \tag{3-58}$$

坐标面:

当 $\mu=$ 常数时,

$$x^2+y^2=\mu^2(\mu^2-2z)$$

这是一个旋转抛物面。

当 $\nu=$ 常数时,

$$x^2+y^2=\nu^2(\nu^2+2z)$$

这也是一个旋转抛物面,

当 ψ = 常数时，

$$y/x = \operatorname{tg}\psi = \text{常数}$$

由式(3-58)知，这是一个半平面。所有这些坐标面都画在图 3-10 中。

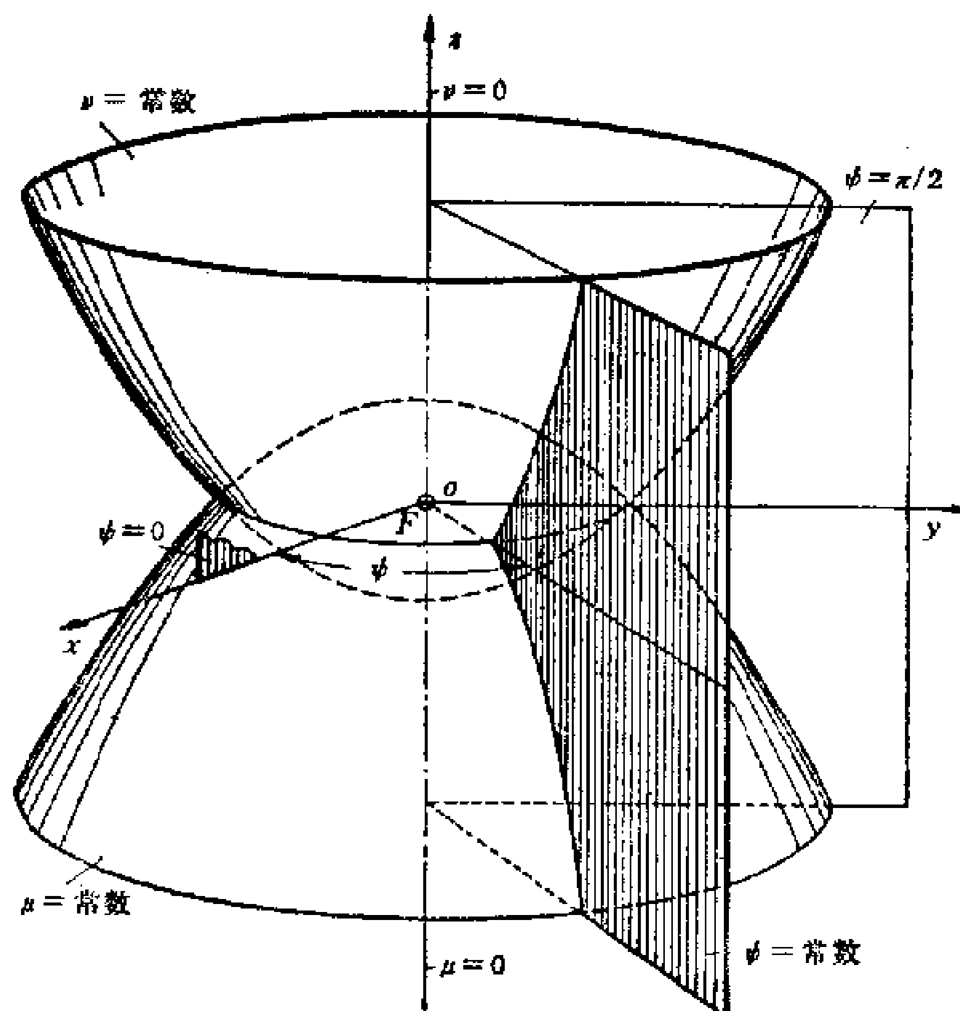


图 3-10　抛物面坐标系

正交性：

$$\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}$$

$$=\frac{\partial x}{\partial \mu}\frac{\partial x}{\partial \nu}+\frac{\partial y}{\partial \mu}\frac{\partial y}{\partial \nu}+\frac{\partial z}{\partial \mu}\frac{\partial z}{\partial \nu}$$

$$=\nu\cos\psi\cdot\mu\cos\psi+\nu\sin\psi\mu\sin\psi-\mu\nu$$

$$=0$$

$$\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial w}+\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial w}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial w}$$

$$=\frac{\partial x}{\partial \mu}\frac{\partial x}{\partial \phi}+\frac{\partial y}{\partial \mu}\frac{\partial y}{\partial \phi}+\frac{\partial z}{\partial \mu}\frac{\partial z}{\partial \phi}$$

$$=\nu\cos\phi(-\mu\nu\sin\phi)+\nu\sin\phi(\mu\nu\cos\phi)+0$$

$$=0$$

$$\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial w}+\frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial w}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial w}$$

$$=\frac{\partial x}{\partial \nu}\frac{\partial x}{\partial \phi}+\frac{\partial y}{\partial \nu}\frac{\partial y}{\partial \phi}+\frac{\partial z}{\partial \nu}\frac{\partial z}{\partial \phi}$$

$$=\mu\cos\phi(-\mu\nu\sin\phi)+\mu\sin\phi(\mu\nu\cos\phi)+0$$

$$=0$$

故抛物面坐标系为正交坐标系。

度量系数：

$$L_u=\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \mu}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial \mu}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial \mu}\right)^2}$$

$$=\sqrt{\nu^2\cos^2\phi+\nu^2\sin^2\phi+\mu^2}$$

$$=\sqrt{\mu^2+\nu^2}$$

$$L_v=\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \nu}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial \nu}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial \nu}\right)^2}$$

$$=\sqrt{\mu^2\cos^2\phi+\mu^2\sin^2\phi+\nu^2}$$

$$=\sqrt{\mu^2+\nu^2}$$

$$L_w=\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \phi}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial \phi}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial \phi}\right)^2}$$

$$=\sqrt{\mu^2\nu^2\sin^2\phi+\mu^2\nu^2\cos^2\phi}$$

$$=\mu\nu$$

(9) 锥面坐标系(图 3-11)

在此坐标系中，惯用的符号是 $u=r$，$v=\theta$，$w=\lambda$。

x、y，z 和 r，θ，λ 的关系是：

$$
\begin{cases}
(x)^2 = \left(\dfrac{r\theta\lambda}{bc}\right)^2 \\
(y)^2 = \dfrac{r^2(\theta^2 - b^2)(b^2 - \lambda^2)}{b^2(c^2 - b^2)} \\
(z)^2 = \dfrac{r^2(c^2 - \theta^2)(c^2 - \lambda^2)}{c^2(c^2 - b^2)}
\end{cases}
\qquad
\begin{aligned}
&0 \leqslant r < \infty \\
&b^2 < \theta^2 < c^2 \\
&0 < \lambda^2 < b^2
\end{aligned}
\tag{3-59}
$$

式中

$$
c^2 > \theta^2 > b^2 > \lambda^2 > 0 \tag{3-60}
$$

坐标面：

当 $r=$ 常数时，

$$
x^2 + y^2 + z^2 = r^2 = \text{常数}
$$

这是一个球面。

当 $\theta=$ 常数时，

$$
\frac{x^2}{\theta^2} + \frac{y^2}{\theta^2 - b^2} - \frac{z^2}{c^2 - \theta^2} = 0
$$

这是一个椭圆锥面。

当 $\lambda=$ 常数时，

$$
\frac{x^2}{\lambda^2} - \frac{y^2}{b^2 - \lambda^2} - \frac{z^2}{c^2 - \lambda^2} = 0
$$

这也是一个椭圆锥面。所有这些坐标面都画在图 3-11 中。

正交性：

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} \\
&= \frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial y}{\partial r}\frac{\partial y}{\partial \theta} + \frac{\partial z}{\partial r}\frac{\partial z}{\partial \theta} \\
&= \frac{\theta\lambda}{bc}\cdot\frac{r\lambda}{bc} + \sqrt{\frac{(\theta^2 - b^2)(b^2 - \lambda^2)}{b^2(c^2 - b^2)}} \\
&\quad\cdot \frac{r\theta\sqrt{b^2 - \lambda^2}}{\sqrt{b^2(c^2 - b^2)(\theta^2 - b^2)}}
\end{aligned}
$$

$$+\sqrt{\frac{(c^2-\theta^2)(c^2-\lambda^2)}{c^2(c^2-b^2)}}$$

$$\cdot\frac{-r\theta\sqrt{c^2-\lambda^2}}{\sqrt{c^2(c^2-b^2)(c^2-\theta^2)}}$$

$$=\frac{r\lambda^2\theta}{b^2c^2}-\frac{\lambda^2 r\theta}{b^2c^2}=0$$

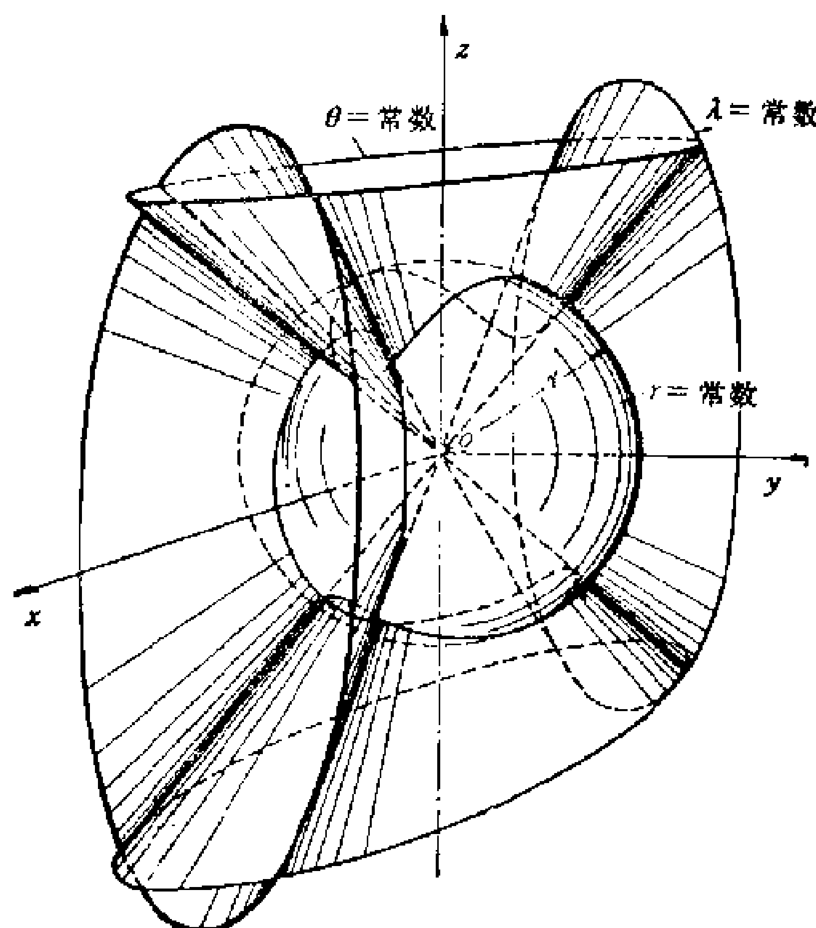


图 3-11　锥面坐标系

$$\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial w}+\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial w}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial w}$$

$$=\frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial x}{\partial \lambda}+\frac{\partial y}{\partial r}\frac{\partial y}{\partial \lambda}+\frac{\partial z}{\partial r}\frac{\partial z}{\partial \lambda}$$

$$=\frac{\theta\lambda}{bc}\cdot\frac{r\theta}{bc}+\sqrt{\frac{(\theta^2-b^2)(b^2-\lambda^2)}{b^2(c^2-b^2)}}$$

$$
\cdot\frac{-r\lambda\sqrt{\theta^2-b^2}}{\sqrt{b^2(c^2-b^2)(b^2-\lambda^2)}}
$$

$$
=\frac{r\lambda\theta^2}{b^2c^2}-\frac{r\lambda\theta^2}{b^2c^2}=0
$$

$$
\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial w}+\frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial w}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial w}
$$

$$
=\frac{\partial x}{\partial \theta}\frac{\partial x}{\partial \lambda}+\frac{\partial y}{\partial \theta}\frac{\partial y}{\partial \lambda}+\frac{\partial z}{\partial \theta}\frac{\partial z}{\partial \lambda}
$$

$$
=\frac{r\lambda}{bc}\frac{r\theta}{bc}+\frac{r\theta\sqrt{b^2-\lambda^2}}{\sqrt{b^2(c^2-b^2)(\theta^2-b^2)}}
$$

$$
\cdot\frac{(-\lambda r)\sqrt{\theta^2-b^2}}{\sqrt{b^2(c^2-b^2)(b^2-\lambda^2)}}
$$

$$
+\frac{(-r\theta)\sqrt{c^2-\lambda^2}}{\sqrt{c^2(c^2-b^2)(c^2-\theta^2)}}
$$

$$
\cdot\frac{(-\lambda r)\sqrt{c^2-\theta^2}}{\sqrt{c^2(c^2-b^2)(c^2-\lambda^2)}}
$$

$$
=\frac{\lambda\theta r^2}{b^2c^2}-\frac{\lambda\theta r^2}{b^2c^2}=0
$$

故锥面坐标系为正交坐标系。

度量系数：

$$
L_r=\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2}
$$

$$
=\sqrt{\frac{\theta^2\lambda^2}{b^2c^2}+\frac{(\theta^2-b^2)(b^2-\lambda^2)}{b^2(c^2-b^2)}+\frac{(c^2-\theta^2)(c^2-\lambda^2)}{c^2(c^2-b^2)}}
$$

$$
=1
$$

$$
L_v=\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \theta}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial \theta}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2}
$$

$$
=\sqrt{\frac{r^2\lambda^2}{b^2c^2}+\frac{r^2\theta^2(b^2-\lambda^2)}{b^2(c^2-b^2)(\theta^2-b^2)}+\frac{r^2\theta^2(c^2-\lambda^2)}{c^2(c^2-b^2)(c^2-\theta^2)}}
$$

$$= \frac{r\sqrt{\theta^2-\lambda^2}}{\sqrt{(\theta^2-b^2)(c^2-\theta^2)}}$$

$$L_w = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \lambda}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{r^2\theta^2}{b^2c^2} + \frac{\lambda^2 r^2(\theta^2-b^2)}{b^2(c^2-b^2)(b^2-\lambda^2)} + \frac{r^2\lambda^2(c^2-\theta^2)}{c^2(c^2-b^2)(c^2-\lambda^2)}}$$

$$= r\sqrt{\frac{\theta^2-\lambda^2}{(b^2-\lambda^2)(c^2-\lambda^2)}}$$

(10) 椭球面坐标系(图 3-12)

在此坐标系中,惯用的符号是 $u=\eta, v=\theta, w=\lambda$。

x,y,z 与 η,θ,λ 的关系是:

$$\begin{cases} (x)^2 = \left(\dfrac{\eta\theta\lambda}{bc}\right)^2 \\ (y)^2 = \dfrac{(\eta^2-b^2)(\theta^2-b^2)(b^2-\lambda^2)}{b^2(c^2-b^2)} \\ (z)^2 = \dfrac{(\eta^2-c^2)(c^2-\theta^2)(c^2-\lambda^2)}{c^2(c^2-b^2)} \end{cases} \quad \begin{matrix} c^2 < \eta^2 < \infty \\ b^2 < \theta^2 < c^2 \\ 0 \leqslant \lambda^2 < b^2 \end{matrix} \qquad (3\text{-}61)$$

式中, b^2, c^2 为常数,且 $b^2 < c^2$。

坐标面:

当 $\eta=$ 常数时

$$\frac{x^2}{\eta^2} + \frac{y^2}{\eta^2-b^2} + \frac{z^2}{\eta^2-c^2}$$

$$= \frac{\theta^2\lambda^2}{b^2c^2} + \frac{(\theta^2-b^2)(b^2-\lambda^2)}{b^2(c^2-b^2)} + \frac{(c^2-\theta^2)(c^2-\lambda^2)}{c^2(c^2-b^2)}$$

$$= 1$$

这是一个椭球面。

当 $\theta=$ 常数时,

$$\frac{x^2}{\theta^2} + \frac{y^2}{\theta^2-b^2} - \frac{z^2}{c^2-\theta^2}$$

$$= \frac{\eta^2\lambda^2}{b^2c^2} + \frac{(\eta^2-b^2)(b^2-\lambda^2)}{b^2(c^2-b^2)} - \frac{(\eta^2-c^2)(c^2-\lambda^2)}{c^2(c^2-b^2)}$$

$$= 1$$

这是一个单叶双曲面。

当 $\lambda =$ 常数时，

$$\frac{x^2}{\lambda^2} - \frac{y^2}{b^2 - \lambda^2} - \frac{z^2}{c^2 - \lambda^2}$$

$$= \frac{\eta^2\theta^2}{b^2c^2} - \frac{(\eta^2 - b^2)(\theta^2 - b^2)}{b^2(c^2 - b^2)} - \frac{(\eta^2 - c^2)(c^2 - \theta^2)}{c^2(c^2 - b^2)}$$

$$= 1$$

这是一个双叶双曲面。所有这些坐标面都画在图 3-12 中。

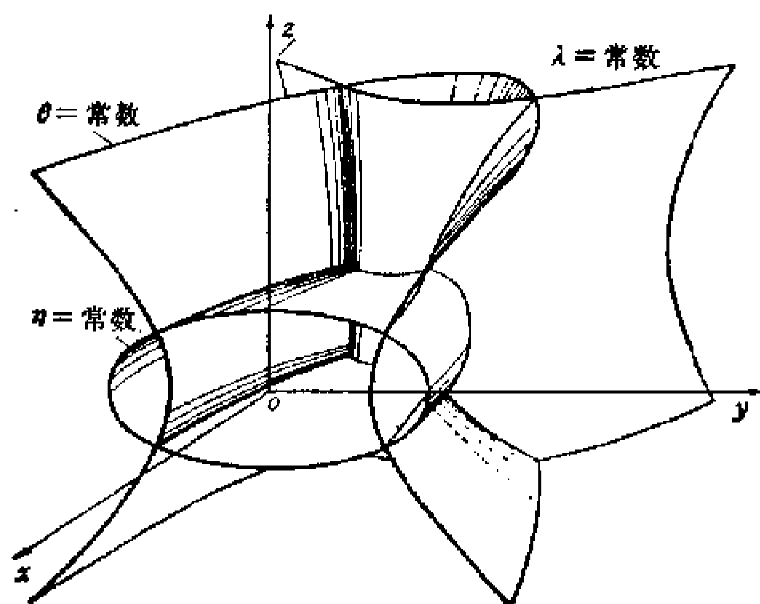


图 3-12 椭球面坐标系

正交性：

$$\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}$$

$$= \frac{\partial x}{\partial \eta}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial y}{\partial \eta}\frac{\partial y}{\partial \theta} + \frac{\partial z}{\partial \eta}\frac{\partial z}{\partial \theta}$$

$$= \frac{\theta\eta\lambda^2}{b^2c^2} + \theta\eta\frac{b^2 - \lambda^2}{b^2(c^2 - b^2)} - \eta\theta\frac{(c^2 - \lambda^2)}{c^2(c^2 - b^2)}$$

$$= 0$$

用同样的方法可证：

$$\frac{\partial x}{\partial \eta}\frac{\partial x}{\partial \lambda}+\frac{\partial y}{\partial \eta}\frac{\partial y}{\partial \lambda}+\frac{\partial z}{\partial \eta}\frac{\partial z}{\partial \lambda}=0$$

$$\frac{\partial x}{\partial \theta}\frac{\partial x}{\partial \lambda}+\frac{\partial y}{\partial \theta}\frac{\partial y}{\partial \lambda}+\frac{\partial z}{\partial \theta}\frac{\partial z}{\partial \lambda}=0$$

故椭球面坐标系为正交坐标系。

度量系数：

$$L_u=\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial \eta}\right)^2}$$

$$=\sqrt{\frac{\theta^2\lambda^2}{b^2c^2}+\frac{\eta^2(\theta^2-b^2)(b^2-\lambda^2)}{b^2(\eta^2-b^2)(c^2-b^2)}+\frac{\eta^2(c^2-\theta^2)(c^2-\lambda^2)}{c^2(\eta^2-c^2)(c^2-b^2)}}$$

根式内通分后将 $\eta^2=\theta^2$ 代入分子，得零，故分子可被 $\eta^2-\theta^2$ 整除。同理可证分子可被 $\eta^2-\lambda^2$ 整除。因此分子可写成

$$A(\eta^2-\lambda^2)(\eta^2-\theta^2)$$

将 $\eta^2=c^2$ 代入分子，得

$$A(c^2-\lambda^2)(c^2-\theta^2)=c^2b^2(c^2-\lambda^2)(c^2-\theta^2)(c^2-b^2)$$

由此可得

$$A=c^2b^2(c^2-b^2)$$

即分子为

$$c^2b^2(c^2-b^2)(\eta^2-\lambda^2)(\eta^2-\theta^2)$$

将该分子代入根式，最后得

$$L_u=\sqrt{\frac{(\eta^2-\lambda^2)(\eta^2-\theta^2)}{(\eta^2-b^2)(\eta^2-c^2)}}$$

用同样的方法可证：

$$L_v=\sqrt{\frac{(\eta^2-\theta^2)(\theta^2-\lambda^2)}{(\theta^2-b^2)(c^2-\theta^2)}}$$

$$L_w=\sqrt{\frac{(\eta^2-\lambda^2)(\theta^2-\lambda^2)}{(b^2-\lambda^2)(c^2-\lambda^2)}}$$

(11) 抛物面坐标系(图 3-13)

在此坐标系中，惯用的符号是 $u=\mu$, $v=\nu$, $w=\lambda$。

x, y, z 和 μ, ν, λ 的关系是:

$$\begin{cases} (x)^2 = \dfrac{4}{(b-c)}(\mu - b)(b - \nu)(b - \lambda) & b < \mu < \infty \\ (y)^2 = \dfrac{4}{(b-c)}(\mu - c)(c - \nu)(\lambda - c) & 0 < \nu < c \\ z = \mu + \nu + \lambda - b - c & c < \lambda < b \end{cases} \tag{3-62}$$

式中，$\mu > b > \lambda > c > \nu > 0$。

坐标面:

当 $\mu =$ 常数时

$$\frac{x^2}{\mu - b} + \frac{y^2}{\mu - c}$$

$$= \frac{4}{b-c}[(b-\nu)(b-\lambda) + (c-\nu)(\lambda - c)]$$

$$= -4(z - \mu)$$

这是一个口朝下的椭圆抛物面。

当 $\nu =$ 常数时，

$$\frac{x^2}{b-\nu} + \frac{y^2}{c-\nu}$$

$$= \frac{4}{b-c}[(\mu - b)(b-\lambda) + (\mu - c)(\lambda - c)]$$

$$= 4(z - \nu)$$

这是一个口朝上的椭圆抛物面。

当 $\lambda =$ 常数时，

$$\frac{x^2}{b-\lambda} - \frac{y^2}{\lambda - c}$$

$$= \frac{4}{b-c}[(\mu - b)(b-\nu) - (\mu - c)(c - \nu)]$$

$$= 4(z - \lambda)$$

这是一个双曲抛物面。所有这些坐标面都画在图(3-13)中。

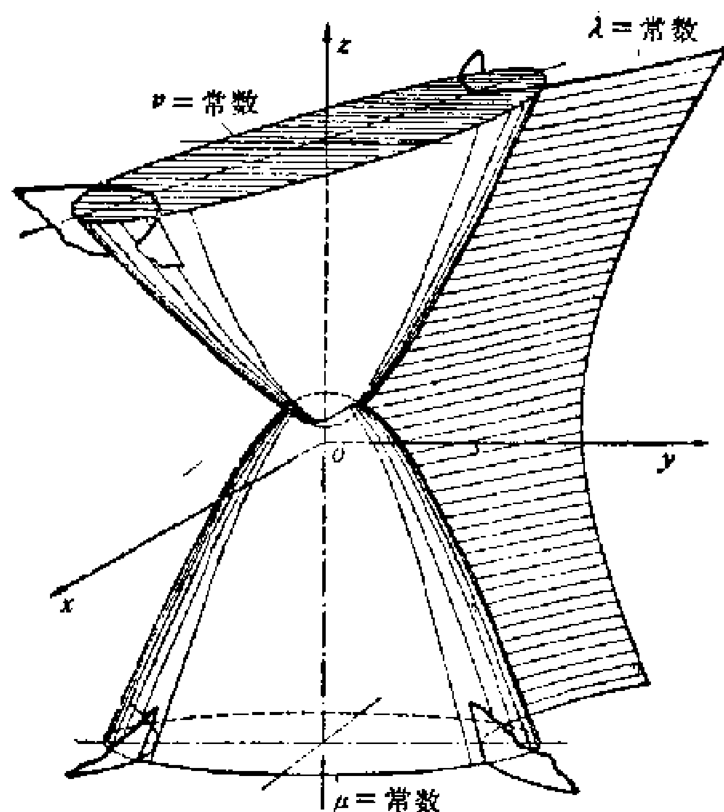


图 3-13 抛物面坐标系

正交性:

$$\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}$$

$$=\frac{\partial x}{\partial \mu}\frac{\partial x}{\partial \nu}+\frac{\partial y}{\partial \mu}\frac{\partial y}{\partial \nu}+\frac{\partial z}{\partial \mu}\frac{\partial z}{\partial \nu}$$

$$=\frac{-1}{b-c}\sqrt{\frac{(b-\nu)(b-\lambda)(\mu-b)(b-\lambda)}{(\mu-b)(b-\nu)}}$$

$$-\frac{1}{b-c}\sqrt{\frac{(c-\nu)(\lambda-c)(\mu-c)(\lambda-c)}{(\mu-c)(c-\nu)}}+1$$

$$=-\frac{b-c}{b-c}+1=0$$

$$\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial w}+\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial w}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial w}$$

$$=\frac{\partial x}{\partial \mu}\frac{\partial x}{\partial \lambda}+\frac{\partial y}{\partial \mu}\frac{\partial y}{\partial \lambda}+\frac{\partial z}{\partial \mu}\frac{\partial z}{\partial \lambda}$$

$$= \frac{-1}{b-c}\sqrt{\frac{(b-\nu)(b-\lambda)(\mu-b)(b-\nu)}{(\mu-b)(b-\lambda)}}$$

$$+\frac{1}{b-c}\sqrt{\frac{(c-\nu)(\lambda-c)(\mu-c)(c-\nu)}{(\mu-c)(\lambda-c)}}+1$$

$$= -\frac{1}{b-c}(b-\nu)+\frac{1}{b-c}(c-\nu)+1$$

$$= 0$$

$$\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial w}+\frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial w}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial w}$$

$$= \frac{\partial x}{\partial \nu}\frac{\partial x}{\partial \lambda}+\frac{\partial y}{\partial \nu}\frac{\partial y}{\partial \lambda}+\frac{\partial z}{\partial \nu}\frac{\partial z}{\partial \lambda}$$

$$= \frac{1}{b-c}\sqrt{\frac{(\mu-b)(b-\lambda)}{(b-\nu)}\frac{(\mu-b)(b-\nu)}{(b-\lambda)}}$$

$$-\frac{1}{b-c}\sqrt{\frac{(\mu-c)(\lambda-c)(\mu-c)(c-\nu)}{(c-\nu)(\lambda-c)}}+1$$

$$= \frac{1}{b-c}(\mu-b)-\frac{1}{b-c}(\mu-c)+1$$

$$= 0$$

故抛物面坐标系为正交坐标系.

度量系数:

$$L_\mu = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \mu}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial \mu}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial \mu}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{b-c}\,\frac{(b-\nu)(b-\lambda)(\mu-c)+(c-\nu)(\lambda-c)(\mu-b)+(b-c)(\mu-b)(\mu-c)}{(\mu-b)(\mu-c)}}$$

在分子中令 $\mu=\nu$ 得零. 再令 $\mu=\lambda$ 仍得零. 可见分子可被 $(\mu-\nu)(\mu-\lambda)$ 整除,从而可写成

$$A(\mu-\nu)(\mu-\lambda) = (b-\nu)(b-\lambda)(\mu-c)$$
$$+(c-\nu)(\lambda-c)(\mu-b)$$
$$+(b-c)(\mu-b)(\mu-c)$$

令 $\mu = b$，得

$$A(b-\nu)(b-\lambda) = (b-\nu)(b-\lambda)(b-c)$$

因此

$$A = b - c$$

最后得

$$L_u = \frac{\sqrt{(\mu-\nu)(\mu-\lambda)}}{\sqrt{(\mu-b)(\mu-c)}}$$

用同样的方法可证：

$$L_v = \frac{\sqrt{(\mu-\nu)(\lambda-\nu)}}{\sqrt{(b-\nu)(c-\nu)}}$$

$$L_w = \sqrt{\frac{(\lambda-\nu)(\mu-\lambda)}{(b-\lambda)(\lambda-c)}}$$

(12) 环面坐标系

在此坐标系中，

$$\begin{aligned} x &= \frac{\operatorname{sh} u \cos v}{\operatorname{ch} u - \cos w} \\ y &= \frac{\operatorname{sh} u \sin v}{\operatorname{ch} u - \cos w} \\ z &= \frac{\sin w}{\operatorname{ch} u - \cos w} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 0 &\leqslant u < \infty \\ 0 &\leqslant v < 2\pi \\ -\pi &\leqslant w \leqslant \pi \end{aligned} \tag{3-63}$$

坐标面：

当 $u =$ 常数时，通过代数运算容易证明：

$$\left(\sqrt{x^2+y^2} - \operatorname{cth} u\right)^2 + z^2 = \frac{1}{\operatorname{sh}^2 u}$$

这是一个将圆

$$(y - \operatorname{cth} u)^2 + z^2 = \frac{1}{\operatorname{sh}^2 u}$$

绕 z 轴旋转而得的环面。因为 $\operatorname{cth} u > \dfrac{1}{\operatorname{sh} u}$，所以此环面与 z 轴不相交。

当 $v =$ 常数时，

$$y = (\mathrm{tg}\, v)x$$

这是一个半平面。

当 w = 常数时，

通过代数运算可证明：

$$x^2 + y^2 + (z - \mathrm{ctg} w)^2 = \frac{1}{\sin^2 w}$$

这是一个球心在 $(0,0,\mathrm{ctg} w)$上、半径为 $\left|\frac{1}{\sin w}\right|$ 的球面。

正交性：

$$\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}$$

$$= \frac{[\mathrm{ch} u \cos v(\mathrm{ch} u - \cos w) - \mathrm{sh}^2 u \cos v](-\mathrm{sh} u \sin v)}{(\mathrm{ch} u - \cos w)^3}$$

$$+ \frac{[\mathrm{ch} u \sin v(\mathrm{ch} u - \cos w) - \mathrm{sh}^2 u \sin v]\mathrm{sh} u \cos v}{(\mathrm{ch} u - \cos w)^3}$$

$$= 0$$

$$\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial w} + \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial w} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial w}$$

$$= \frac{-\sin v \mathrm{sh} u}{(\mathrm{ch} u - \cos w)} \cdot \frac{\mathrm{sh} u \cos v \sin w}{(\mathrm{ch} u - \cos w)^2}$$

$$+ \frac{\mathrm{sh} u \cos v \cdot \mathrm{sh} u \sin v \sin w}{(\mathrm{ch} u - \cos w)^3}$$

$$= 0$$

$$\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial w} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial w} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial w}$$

$$= \cos^2 v \cdot \frac{[\mathrm{ch} u(\mathrm{ch} u - \cos w) - \mathrm{sh}^2 u](-\mathrm{sh} u \sin w)}{(\mathrm{ch} u - \cos w)^4}$$

$$+ \sin^2 v \cdot \frac{[\mathrm{ch} u(\mathrm{ch} u - \cos w) - \mathrm{sh}^2 u](-\mathrm{sh} u \sin w)}{(\mathrm{ch} u - \cos w)^4}$$

$$- \frac{\sin w \mathrm{sh} u[\cos w(\mathrm{ch} u - \cos w) - \sin^2 w]}{(\mathrm{ch} u - \cos w)^4}$$

$$= \frac{(1 - \mathrm{ch}u\cos w)(-\mathrm{sh}u\sin w)}{(\mathrm{ch}u - \cos w)^4}$$

$$- \frac{\sin w\,\mathrm{sh}u(\mathrm{ch}u\cos w - 1)}{(\mathrm{ch}u - \cos w)^4}$$

$$= 0$$

故环面坐标系为正交坐标系。

度量系数:

$$L_u = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{[\mathrm{ch}u(\mathrm{ch}u - \cos w) - \mathrm{sh}^2u]^2 + \sin^2 w\,\mathrm{sh}^2u}{(\mathrm{ch}u - \cos w)^4}}$$

$$= \frac{1}{\mathrm{ch}u - \cos w}$$

$$L_v = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2}$$

$$= \frac{\sqrt{\mathrm{sh}^2u\sin^2 v + \mathrm{sh}^2u\cos^2 v + 0}}{\mathrm{ch}u - \cos w}$$

$$= \frac{\mathrm{sh}u}{\mathrm{ch}u - \cos w}$$

$$L_w = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial w}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial w}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial w}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{\mathrm{sh}^2u\sin^2 w + [\cos w(\mathrm{ch}u - \cos w) - \sin^2 w]^2}{(\mathrm{ch}u - \cos w)^4}}$$

$$= \frac{1}{\mathrm{ch}u - \cos w}$$

(13) 双极坐标系

在此坐标系中,

$$\begin{cases} x = \dfrac{\sin u\cos v}{\mathrm{ch}w - \cos u} & 0 \leqslant u < \pi \\ & 0 \leqslant v < 2\pi \\ y = \dfrac{\sin u\sin v}{\mathrm{ch}w - \cos u} & -\infty < w < +\infty \end{cases} \qquad (3\text{-}64)$$

$$\left\{ z = \frac{\operatorname{sh} w}{\operatorname{ch} w - \cos u} \right.$$

坐标面:

当 $u=$ 常数时,

$$\left(\sqrt{x^2+y^2}-\operatorname{ctg} u\right)^2+z^2=\frac{1}{\sin^2 u}$$

这可通过简单的代数运算得到证明. 从公式可见，这是一个将圆

$$(y-\operatorname{ctg} u)^2+z^2=\frac{1}{\sin^2 u}$$

绕 z 轴旋转而得的曲面(曲面与 z 轴相交),因为

$$|\operatorname{ctg} u|<\frac{1}{\sin u}$$

当 $v=$ 常数时,

$$y=(\operatorname{tg} v)x$$

这是一个半平面.

当 $w=$ 常数时,

$$x^2+y^2+(z-\operatorname{cth} w)^2=\frac{1}{\operatorname{sh}^2 w}$$

这是一个以 $(0,0,\operatorname{cth} w)$ 为球心、$\left|\frac{1}{\operatorname{sh} w}\right|$ 为半径的球面.

正交性:

$$\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}$$

$$=-\cos v\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\sin u}{\operatorname{ch} w-\cos u}\right)\cdot\sin v\cdot\frac{\sin u}{\operatorname{ch} w-\cos u}$$

$$+\sin v\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\sin u}{\operatorname{ch} w-\cos u}\right)\cdot\cos v\frac{\sin u}{\operatorname{ch} w-\cos u}$$

$$=\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\sin u}{\operatorname{ch} w-\cos u}\right)\frac{\sin u(-\cos v\sin v+\sin v\cos v)}{\operatorname{ch} w-\cos u}$$

$$=0$$

用同样的方法可证:

$$\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial w}+\frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial w}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial w}=0$$

$$\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial w}+\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial w}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial w}=0$$

故双极坐标系为正交坐标系。

度量系数：

$$L_u=\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2}$$

$$=\frac{1}{(\mathrm{ch}w-\cos u)^2}\sqrt{(\cos^2 v+\sin^2 v)[\cos u(\mathrm{ch}w-\cos u)-\sin^2 u]^2+\mathrm{sh}^2 w\sin^2 u}$$

$$=\frac{1}{\mathrm{ch}w-\cos u}$$

用同样的方法可证：

$$L_v=\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2}$$

$$=\frac{\sin u}{\mathrm{ch}w-\cos u}$$

$$L_w=\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial w}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial w}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial w}\right)^2}$$

$$=\frac{1}{\mathrm{ch}w-\cos u}$$

3-3　空间正交曲线坐标系的其他表示形式

从文献中还可以见到我们上面所研究过的正交曲线坐标系的其他表示形式。它们与我们所用表示形式的差别在于每个曲线坐标都以一种函数关系进行了变换。可以说，这是对曲线坐标线作了“伸缩”处理，但并不影响坐标面的形状。现在我们分别将不同坐标系的不同表现形式列举如下：

(1) 椭圆柱面坐标系

上一节中的椭圆柱面坐标系的表示形式如下：

$$\begin{cases} x = a\,\mathrm{ch}\eta\cos\psi & 0 < \eta < \infty \\ y = a\,\mathrm{sh}\eta\sin\psi & 0 \leqslant \psi < 2\pi \\ z = z & -\infty < z < +\infty \end{cases}$$

引入新变量

$$\xi = \mathrm{ch}\eta, \quad \zeta = \cos\psi, \quad z = z$$

则 x, y, z 和 ξ, ζ, z 之间的关系是：

$$\begin{cases} x = a\xi\zeta \\ y = a\sqrt{(\xi^2 - 1)(1 - \zeta^2)} \\ z = z \end{cases} \tag{3-65}$$

而由 η, ψ, z 的变化范围得 ξ, ζ, z 的变化范围如下：

$$\xi \geqslant 1, \quad -1 < \zeta \leqslant 1, \quad -\infty < z < +\infty$$

式(3-65)就是椭圆柱面坐标系的另一表示形式。

度量系数可以计算如下：

$$L_\xi = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \xi}\right)^2}$$

$$= a\sqrt{\frac{\xi^2 - \zeta^2}{\xi^2 - 1}}$$

用同法可以算出：

$$L_\zeta = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \zeta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \zeta}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \zeta}\right)^2}$$

$$= a\sqrt{\frac{\xi^2 - \zeta^2}{1 - \zeta^2}}$$

$$L_z = 1$$

(2) 抛物柱面坐标系

上一节中的抛物柱面坐标系的表示形式如下：

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{2}(\mu^2 - \nu^2) & 0 \leqslant \mu < +\infty \\ y = \mu\nu & -\infty < \nu < +\infty \\ z = z & -\infty < z < +\infty \end{cases} \tag{3-66}$$

引入新变量

$$\mu^2 = \xi, \quad \nu^2 = \eta, \quad z = z$$

则 x, y, z 和 ξ, η, z 的关系是:

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{2}(\xi - \eta) \\ y = \sqrt{\xi\eta} \\ z = z \end{cases} \tag{3-67}$$

式(3-67)是抛物柱面坐标系的另一种表示形式。ξ, η, z 的变化范围是 $0 < \xi < +\infty, 0 < \eta < +\infty, -\infty < z < +\infty$。

度量系数可以计算如下:

$$L_\xi = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \xi}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\xi + \eta}{\xi}}$$

$$L_\eta = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \eta}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\xi + \eta}{\eta}}$$

$$L_z = 1$$

(3) 长椭球面坐标系

上一节中的长椭球坐标系的表示形式如下:

$$\begin{cases} x = a\,\mathrm{sh}\eta \sin\theta \cos\phi & 0 \leqslant \eta < \infty \\ y = a\,\mathrm{sh}\eta \sin\theta \sin\phi & 0 \leqslant \theta \leqslant \pi \\ z = a\,\mathrm{ch}\eta \cos\theta & 0 \leqslant \phi < 2\pi \end{cases}$$

引入新变量

$$u = \mathrm{ch}\eta, \quad v = \cos\theta, \quad \phi = \phi$$

则 x, y, z 和 u, v, ϕ 之间的关系是:

$$\begin{cases} x = a\sqrt{(u^2 - 1)(1 - v^2)}\cos\phi \\ y = a\sqrt{(u^2 - 1)(1 - v^2)}\sin\phi \\ z = auv \end{cases} \tag{3-68}$$

式(3-68)是长椭球面坐标系的另一表示形式. 由 η, θ, ϕ 的变化范围得 u, v, ϕ 的变化范围为 $1 \leqslant u < +\infty, -1 \leqslant v \leqslant +1$, $0 \leqslant \phi < 2\pi$. 度量系数可以计算如下:

$$L_u = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{a^2(1-v^2)u^2\cos^2\phi}{u^2-1} + \frac{a^2(1-v^2)u^2\sin^2\phi}{u^2-1} + a^2v^2}$$

$$= a\sqrt{\frac{u^2-v^2}{u^2-1}}$$

同理

$$L_v = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2}$$

$$= a\sqrt{\frac{u^2-v^2}{1-v^2}}$$

$$L_\phi = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \phi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \phi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \phi}\right)^2}$$

$$= a\sqrt{(u^2-1)(1-v^2)}$$

(4) 扁椭球面坐标系

上一节中的扁椭球面坐标系的表示形式如下:

$$\begin{cases} x = a\,\mathrm{ch}\eta\sin\theta\cos\phi & 0 \leqslant \eta < +\infty \\ y = a\,\mathrm{ch}\eta\sin\theta\sin\phi & 0 \leqslant \theta \leqslant \pi \\ z = a\,\mathrm{sh}\eta\cos\theta & 0 \leqslant \phi < 2\pi \end{cases}$$

引入新变量

$$u = \mathrm{ch}\eta, \quad v = \sin\theta, \quad \phi = \phi$$

则 x, y, z 和 u, v, ϕ 之间的关系是:

$$\begin{cases} x = auv\cos\phi \\ y = auv\sin\phi \\ z = a\sqrt{u^2-1}\sqrt{1-v^2} \end{cases} \tag{3-69}$$

式(3-69)就是扁椭球面坐标系的另一表现形式. 而由 η, θ, ϕ 的

变化范围得 u, v, ϕ 的变化范围如下：

$$1 \leqslant u < +\infty, \quad -1 \leqslant v \leqslant +1, \quad 0 \leqslant \phi < 2\pi$$

度量系数可以计算如下：

$$L_u = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2}$$

$$= \sqrt{a^2v^2\cos^2\phi + a^2v^2\sin^2\phi + \frac{a^2u^2(1 - v^2)}{u^2 - 1}}$$

$$= a\sqrt{\frac{u^2 - v^2}{u^2 - 1}}$$

$$L_v = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2}$$

$$= \sqrt{a^2u^2\sin^2\phi + a^2u^2\cos^2\phi + \frac{a^2(u^2 - 1)v^2}{1 - v^2}}$$

$$= a\sqrt{\frac{u^2 - v^2}{1 - v^2}}$$

$$L_\phi = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \phi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \phi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \phi}\right)^2}$$

$$= \sqrt{a^2u^2v^2\sin^2\phi + a^2u^2v^2\cos^2\phi}$$

$$= auv$$

(5) 抛物面坐标系

上一节中的抛物面坐标系的表示形式如下：

$$\begin{cases} x = \mu\nu\cos\phi & 0 \leqslant \mu < +\infty \\ y = \mu\nu\sin\phi & 0 \leqslant \nu < +\infty \\ z = \dfrac{1}{2}(\mu^2 - \nu^2) & 0 \leqslant \phi < 2\pi \end{cases}$$

引入新变量

$$u = \mu^2, \quad v = \nu^2, \quad \phi = \phi$$

则 x, y, z 和 u, v, ϕ 之间的关系是：

$$\begin{cases} x = \sqrt{uv}\cos\phi \\ y = \sqrt{uv}\sin\phi \\ z = \dfrac{1}{2}(u - v) \end{cases} \tag{3-70}$$

式(3-70)就是抛物面坐标系的另一种表示形式，而由 μ, ν, ϕ 的变化范围得 u, v, ϕ 的变化范围为 $0<u<+\infty, 0<v<+\infty$, $0<\phi\leqslant 2\pi$。度量系数可以计算如下：

$$L_u = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{v\cos^2\phi}{4u} + \frac{v\sin^2\phi}{4u} + \frac{1}{4}}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{u+v}{u}}$$

$$L_v = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{u+v}{v}}$$

$$L_\phi = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \phi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \phi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \phi}\right)^2}$$

$$= \sqrt{uv\cos^2\phi + uv\sin^2\phi}$$

$$= \sqrt{uv}$$

(6) 锥面坐标系

上一节中的锥面坐标系的表示形式如下：

$$\begin{cases} (x)^2 = \left(\dfrac{r\theta\lambda}{bc}\right)^2 & 0\leqslant r<+\infty \\ (y)^4 = \dfrac{r^2(\theta^2-b^2)(b^2-\lambda^2)}{b^2(c^2-b^2)} & b^2<\theta^2<c^2 \\ & 0<\lambda^2<b^2 \end{cases}$$

$$\left\{ (z)^2 = \frac{r^2(c^2-\theta^2)(c^2-\lambda^2)}{c^2(c^2-b^2)} \right.$$

引入新变量 $r = r$，$\xi = \theta^2$，$\eta = \lambda^2$，则

$$c^2 > \xi > b^2 > \eta > 0$$

这时

$$\begin{cases} x^2 = \dfrac{r^2\xi\eta}{b^2c^2} \\ y^2 = \dfrac{r^2(\xi-b^2)(b^2-\eta)}{b^2(c^2-b^2)} \\ z^2 = \dfrac{r^2(c^2-\xi)(c^2-\eta)}{c^2(c^2-b^2)} \end{cases} \tag{3-71}$$

这就是锥面坐标系的另一表示形式。

度量系数可以计算如下：

$$L_r = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{\xi\eta}{b^2c^2} + \frac{(\xi-b^2)(b^2-\eta)}{b^2(c^2-b^2)} + \frac{(c^2-\xi)(c^2-\eta)}{c^2(c^2-b^2)}}$$

$$= 1$$

$$L_\xi = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \xi}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{r^2\eta}{4\xi b^2c^2} + \frac{r^2(b^2-\eta)}{4b^2(c^2-b^2)(\xi-b^2)} + \frac{r^2(c^2-\eta)}{4c^2(c^2-b^2)(c^2-\xi)}}$$

$$= \frac{r}{2}\sqrt{\frac{\xi-\eta}{\xi(\xi-b^2)(c^2-\eta)}}$$

$$L_\eta = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \eta}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{r^2\xi}{4\eta b^2c^2} + \frac{r^2(\xi-b^2)}{4(b^2-\eta)b^2(c^2-b^2)} + \frac{r^2(c^2-\xi)}{4c^2(c^2-b^2)(c^2-\eta)}}$$

$$= \frac{r}{2}\sqrt{\frac{\xi-\eta}{\eta(b^2-\eta)(c^2-\eta)}}$$

(7) 抛物面坐标系

上一节中的抛物面坐标系的表示形式如下：

$$
\begin{cases}
x^2 = \dfrac{4}{b-c}(\mu - b)(b - \nu)(b - \lambda) \\
y^2 = \dfrac{4}{b-c}(\mu - c)(c - \nu)(\lambda - c) \\
z = \mu + \nu + \lambda - b - c
\end{cases}
\tag{3-72}
$$

式中，$0<\nu<c<\lambda<b<\mu<+\infty$。

引入新变量 u, v, w：

$$
\begin{cases}
\mu = -\dfrac{b-c}{2}\operatorname{ch}u + \dfrac{b+c}{2} \\
\nu = -\dfrac{b-c}{2}\cos v + \dfrac{b+c}{2} \\
\lambda = \dfrac{b-c}{2}\operatorname{ch}w + \dfrac{b+c}{2}
\end{cases}
\tag{3-73}
$$

将式(3-73)代入式(3-72)，得 x, y, z 和 u, v, w 的关系如下：

$$
\begin{cases}
x = 2(b-c)\operatorname{ch}\dfrac{u}{2}\cos\dfrac{v}{2}\operatorname{sh}\dfrac{w}{2} \\
y = 2(b-c)\operatorname{sh}\dfrac{u}{2}\sin\dfrac{v}{2}\operatorname{ch}\dfrac{w}{2} \\
z = -(b-c)\left(\operatorname{ch}^2\dfrac{u}{2} + \cos^2\dfrac{v}{2} - \operatorname{ch}^2\dfrac{w}{2}\right) + b
\end{cases}
\tag{3-74}
$$

式(3-74)就是抛物面坐标系的另一表示形式。

度量系数可以计算如下：

$$
L_u = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2}
$$

求出各导数后，平方相加并利用半角公式加以化简，最后得

$$
L_u = \frac{2}{b-c}\sqrt{(\operatorname{ch}u - \cos v)(\operatorname{ch}u + \operatorname{ch}w)}
$$

用同样的方法可证：

$$L_v = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2}$$

$$= \frac{2}{b-c}\sqrt{(\mathrm{ch}u - \cos v)(\cos v + \mathrm{ch}w)}$$

$$L_w = \frac{2}{b-c}\sqrt{(\mathrm{ch}u + \mathrm{ch}w)(\cos v + \mathrm{ch}w)}$$

（8）环面坐标系

上一节中的环面坐标系的表示形式如下：

$$\begin{cases} x = \dfrac{\mathrm{sh}u \cos v}{\mathrm{ch}u - \cos w} & 0 \leqslant u < +\infty \\ y = \dfrac{\mathrm{sh}u \sin v}{\mathrm{ch}u - \cos w} & 0 \leqslant v < 2\pi \\ z = \dfrac{\sin w}{\mathrm{ch}u - \cos w} & -\pi \leqslant w \leqslant \pi \end{cases}$$

引入新变量 $\xi = \mathrm{ch}u$，$\eta = \cos w$，$v = v$，则 x, y, z 和 ξ，η，v 的关系是：

$$\begin{cases} x = \dfrac{\sqrt{\xi^2 - 1}}{\xi - \eta} \cos v & 1 \leqslant u < +\infty \\ y = \dfrac{\sqrt{\xi^2 - 1}}{\xi - \eta} \sin v & -1 \leqslant \eta \leqslant 1 \\ z = \dfrac{\sqrt{\xi^2 - 1}}{\xi - \eta} & 0 \leqslant v < 2\pi \end{cases} \tag{3-75}$$

式(3-75)就是环面坐标系的另一表示形式。度量系数可以计算如下：

$$L_\xi = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \xi}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{(1-\xi\eta)^2\cos^2 v}{(\xi-\eta)^4(\xi^2-1)} + \frac{(1-\xi\eta)^2\sin^2 v}{(\xi-\eta)^4(\xi^2-1)} + \frac{1-\eta^2}{(\xi-\eta)^4}}$$

$$= \frac{1}{(\xi-\eta)\sqrt{\xi^2-1}}$$

$$L_\eta = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \eta}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{(\xi^2 - 1)\cos^2 v}{(\xi - \eta)^4} + \frac{(\xi^2 - 1)\sin^2 v}{(\xi - \eta)^4} + \frac{(1 - \xi\eta)^2}{(\xi - \eta)^4(1 - \eta^2)}}$$

$$= \frac{1}{(\xi - \eta)\sqrt{1 - \eta^2}}$$

$$L_v = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2}$$

$$= \frac{\sqrt{\xi^2 - 1}}{\xi - \eta}$$

进一步引入新变量

$$\lambda = \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 - 1}}, \quad \mu = \frac{\eta}{\sqrt{1 - \eta^2}}, \quad v = v \tag{3-76}$$

由式(3-76)解出

$$\xi = \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - 1}}, \qquad \eta = \frac{\mu}{\sqrt{\mu^2 + 1}}$$

代入式(3-75)，得 x, y, z 和 λ, μ, v 的关系是：

$$\begin{cases} x = \cos v \dfrac{\sqrt{\mu^2 + 1}}{\lambda\sqrt{\mu^2 + 1} - \mu\sqrt{\lambda^2 - 1}} \\ y = \sin v \dfrac{\sqrt{\mu^2 + 1}}{\lambda\sqrt{\mu^2 + 1} - \mu\sqrt{\lambda^2 - 1}} \\ z = \dfrac{\sqrt{\lambda^2 - 1}}{\lambda\sqrt{\mu^2 + 1} - \mu\sqrt{\lambda^2 - 1}} \end{cases} \tag{3-77}$$

式(3-77)是环面坐标系的第三种表示形式。

度量系数可以计算如下：

$$L_\lambda = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \lambda}\right)^2}$$

$$= \frac{\sqrt{\mu^2+1}}{\sqrt{\lambda^2-1}\,(\lambda\sqrt{\mu^2+1}-\mu\sqrt{\lambda^2-1})}$$

$$L_\mu = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \mu}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \mu}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \mu}\right)^2}$$

$$= \frac{\sqrt{\lambda^2-1}}{\sqrt{\mu^2+1}\,(\lambda\sqrt{\mu^2+1}-\mu\sqrt{\lambda^2-1})}$$

$$L_v = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2}$$

$$= \frac{\sqrt{\mu^2+1}}{\lambda\sqrt{\mu^2+1}-\mu\sqrt{\lambda^2-1}}$$

（9）双极坐标系

上一节中的双极坐标系的表示形式如下：

$$\begin{cases} x = \dfrac{\sin u \cos v}{\mathrm{ch} w - \cos u} & 0 \leqslant u < \pi \\ y = \dfrac{\sin u \sin v}{\mathrm{ch} w - \cos u} & 0 \leqslant v < 2\pi \\ z = \dfrac{\mathrm{sh} w}{\mathrm{ch} w - \cos u} & -\infty < w < +\infty \end{cases}$$

引入新变量 $\xi = \mathrm{ch} w$，$\eta = \cos u$，$v = v$，则 x, y, z 和 ξ，η，v 的关系是：

$$\begin{cases} x = \cos v \dfrac{\sqrt{1-\eta^2}}{\xi-\eta} & 0 < \xi < +\infty \\ y = \sin v \dfrac{\sqrt{1-\eta^2}}{\xi-\eta} & -1 < \eta \leqslant 1 \\ z = \dfrac{\sqrt{\xi^2-1}}{\xi-\eta} & 0 \leqslant v < 2\pi \end{cases} \tag{3-78}$$

式(3-78)就是双极坐标系的第二种表示形式。

度量系数可计算如下：

$$L_\xi = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \xi}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{(\xi - \eta)\sqrt{\xi^2 - 1}}$$

$$L_\eta = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \eta}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{(\xi - \eta)\sqrt{1 - \eta^2}}$$

$$L_v = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2}$$

$$= \frac{\sqrt{1 - \eta^2}}{\xi - \eta}$$

进一步引入新变量

$$\lambda = \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 - 1}} \qquad \mu = \frac{\eta}{\sqrt{1 - \eta^2}} \qquad v = v \tag{3-79}$$

由式(3-79)解出

$$\xi = \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - 1}}, \quad \eta = \frac{\mu}{\sqrt{\mu^2 + 1}}$$

代入式(3-78)得 x, y, z 和 λ, μ, v 的关系是:

$$\begin{cases} x = \cos v \dfrac{\sqrt{\lambda^2 - 1}}{\lambda\sqrt{\mu^2 + 1} - \mu\sqrt{\lambda^2 - 1}} \\ y = \sin v \dfrac{\sqrt{\lambda^2 - 1}}{\lambda\sqrt{\mu^2 + 1} - \mu\sqrt{\lambda^2 - 1}} \\ z = \dfrac{\sqrt{\mu^2 + 1}}{\lambda\sqrt{\mu^2 + 1} - \mu\sqrt{\lambda^2 - 1}} \end{cases} \tag{3-80}$$

式(3-80)就是双极坐标系的第三种表示形式。

度量系数可计算如下:

$$L_\lambda = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \lambda}\right)^2}$$

$$= \frac{\sqrt{\mu^2 + 1}}{\sqrt{\lambda^2 - 1}\,(\lambda\sqrt{\mu^2 + 1} - \mu\sqrt{\lambda^2 - 1})}$$

$$L_\mu = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \mu}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \mu}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \mu}\right)^2}$$

$$= \frac{\sqrt{\lambda^2 - 1}}{\sqrt{\mu^2 + 1}\,(\lambda\sqrt{\mu^2 + 1} - \mu\sqrt{\lambda^2 - 1})}$$

$$L_\nu = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \nu}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \nu}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \nu}\right)^2}$$

$$= \frac{\sqrt{\lambda^2 - 1}}{\lambda\sqrt{\mu^2 + 1} - \mu\sqrt{\lambda^2 - 1}}$$

3-4 散度、旋度、梯度及方向导数在曲线坐标系中的表达式

为了解决实际问题，需要根据具体情况选用坐标系。由此可见，求出 div, rot, grad 和 $(\mathbf{a}\cdot\nabla)\mathbf{b}$ 等在曲线坐标系中的表达式是具有实际意义的。一旦选定了坐标系，利用本节的公式，马上就可以写出相应的方程并进行求解。

在本节中，我们将先推导一些在下面推导过程中要用到的关系式，然后再系统地推导所需公式。

3-4-1 一些辅助关系式

方向余弦的公式

令 $\mathbf{r}$ 为某一点的矢径，则在直角坐标系中，

$$d\mathbf{r} = \mathbf{i}dx + \mathbf{j}dy + \mathbf{k}dz$$

而在正交曲线坐标系统中，

$$d\mathbf{r} = \mathbf{e}_u L_u du + \mathbf{e}_v L_v dv + \mathbf{e}_w L_w dw$$

$d\mathbf{r}$ 在 x 轴上的投影，即 dx，等于 $d\mathbf{r}$ 在 $\mathbf{e}_u, \mathbf{e}_v, \mathbf{e}_w$ 方向上的分量在 x 轴上的投影，即

$$dx = L_u du \cos(u, x) + L_v dv \cos(v, x) + L_w dw \cos(w, x) \tag{3-81}$$

式中 $\cos(u,x)$ 为 u 轴与 x 轴之间夹角的余弦。其余类推。

另一方面,根据全微分公式

$$dx = \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv + \frac{\partial x}{\partial w} dw \tag{3-82}$$

比较式(3-81)和(3-82),即得

$$\begin{cases} L_u \cos(u,x) = \dfrac{\partial x}{\partial u} \\ L_v \cos(v,x) = \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ L_w \cos(w,x) = \dfrac{\partial x}{\partial w} \end{cases}$$

或

$$\begin{cases} \cos(u,x) = \dfrac{1}{L_u} \dfrac{\partial x}{\partial u} \\ \cos(v,x) = \dfrac{1}{L_v} \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \cos(w,x) = \dfrac{1}{L_w} \dfrac{\partial x}{\partial w} \end{cases} \tag{3-83}$$

用同样的方法可得

$$\begin{cases} \cos(u,y) = \dfrac{1}{L_u} \dfrac{\partial y}{\partial u} \\ \cos(v,y) = \dfrac{1}{L_v} \dfrac{\partial y}{\partial v} \\ \cos(w,y) = \dfrac{1}{L_w} \dfrac{\partial y}{\partial w} \end{cases} \qquad \begin{cases} \cos(u,z) = \dfrac{1}{L_u} \dfrac{\partial z}{\partial u} \\ \cos(v,z) = \dfrac{1}{L_v} \dfrac{\partial z}{\partial v} \\ \cos(w,z) = \dfrac{1}{L_w} \dfrac{\partial z}{\partial w} \end{cases} \tag{3-84}$$

3-4-2 单位矢量 $\mathbf{e}_u,\mathbf{e}_v,\mathbf{e}_w$ 的导数

在曲线坐标系中,由于坐标线不是直线,因此坐标线某一点上切矢量的方向不是固定的,从而单位长度的切矢量虽然长度不变,但其方向一般来说总是变化的。在矢量分析中经常需要用到 $\mathbf{e}_u$,$\mathbf{e}_v$,$\mathbf{e}_w$ 对 u, v, w 的偏导数公式。这里 $\mathbf{e}_u,\mathbf{e}_v,\mathbf{e}_w$ 分别指的是沿

u, v, w 坐标线的单位矢量.

我们先来列举一下结果:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathbf{e}_u}{\partial u} = -\dfrac{\mathbf{e}_v}{L_v}\dfrac{\partial L_u}{\partial v} - \dfrac{\mathbf{e}_w}{L_w}\dfrac{\partial L_u}{\partial w} \\ \dfrac{\partial \mathbf{e}_u}{\partial v} = \dfrac{\mathbf{e}_v}{L_u}\dfrac{\partial L_v}{\partial u} \\ \dfrac{\partial \mathbf{e}_u}{\partial w} = \dfrac{\mathbf{e}_w}{L_u}\dfrac{\partial L_w}{\partial u} \end{cases} \tag{3-85}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathbf{e}_v}{\partial u} = \dfrac{\mathbf{e}_u}{L_v}\dfrac{\partial L_u}{\partial v} \\ \dfrac{\partial \mathbf{e}_v}{\partial v} = -\dfrac{\mathbf{e}_u}{L_u}\dfrac{\partial L_v}{\partial u} - \dfrac{\mathbf{e}_w}{L_w}\dfrac{\partial L_v}{\partial w} \\ \dfrac{\partial \mathbf{e}_v}{\partial w} = \dfrac{\mathbf{e}_w}{L_v}\dfrac{\partial L_w}{\partial v} \end{cases} \tag{3-86}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathbf{e}_w}{\partial u} = \dfrac{\mathbf{e}_u}{L_w}\dfrac{\partial L_u}{\partial w} \\ \dfrac{\partial \mathbf{e}_w}{\partial v} = \dfrac{\mathbf{e}_v}{L_w}\dfrac{\partial L_v}{\partial w} \\ \dfrac{\partial \mathbf{e}_w}{\partial w} = -\dfrac{\mathbf{e}_u}{L_u}\dfrac{\partial L_w}{\partial u} - \dfrac{\mathbf{e}_v}{L_v}\dfrac{\partial L_w}{\partial v} \end{cases} \tag{3-87}$$

首先我们指出，$\mathbf{e}_v, \mathbf{e}_w$ 的公式可以从 $\mathbf{e}_u$ 的公式经循环置换，即 $u \to v, v \to w, w \to u$ 而得到。这是因为循环置换只不过是改变了坐标轴的标注而已，并不改变坐标轴之间的相对关系。因此对 $\mathbf{e}_u$ 的公式经循环置换后变成对 $\mathbf{e}_v$ 也成立。余依此类推。

在这一节中我们详细证明(用纯解析的方法)(3-85)中的第一个公式。第二和第三个公式可以用完全同样的方法证明。读者可以作为一个练习,自己证明它们。下面我们证明第一个公式,即

$$\frac{\partial \mathbf{e}_u}{\partial u} = -\frac{\mathbf{e}_v}{L_v}\frac{\partial L_u}{\partial v} - \frac{\mathbf{e}_w}{L_w}\frac{\partial L_u}{\partial w}$$

$$\frac{\partial \mathbf{e}_u}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{L_u \mathbf{e}_u}{L_u}\right)$$

$$= L_u \mathbf{e}_u \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{L_u}\right) + \frac{1}{L_u}\frac{\partial}{\partial u}(L_u \mathbf{e}_u) \qquad (3\text{-}88)$$

因

$$\mathbf{e}_u = \mathbf{i}\cos(u,x) + \mathbf{j}\cos(u,y) + \mathbf{k}\cos(u,z)$$

而由式(3-67)和(3-68),得:

$$\cos(u,x) = \frac{1}{L_u}\frac{\partial x}{\partial u}, \quad \cos(u,y) = \frac{1}{L_u}\frac{\partial y}{\partial u}$$

$$\cos(u,z) = \frac{1}{L_u}\frac{\partial z}{\partial u}$$

故

$$\mathbf{e}_u = \frac{1}{L_u}\left(\mathbf{i}\frac{\partial x}{\partial u} + \mathbf{j}\frac{\partial y}{\partial u} + \mathbf{k}\frac{\partial z}{\partial u}\right) \qquad (3\text{-}89)$$

即

$$L_u \mathbf{e}_u = \mathbf{i}\frac{\partial x}{\partial u} + \mathbf{j}\frac{\partial y}{\partial u} + \mathbf{k}\frac{\partial z}{\partial u} \qquad (3\text{-}90)$$

将式(3-90)代入式(3-88),得

$$\frac{\partial \mathbf{e}_u}{\partial u} = L_u \mathbf{e}_u \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{L_u}\right) + \frac{1}{L_u}\frac{\partial}{\partial u}\left(\mathbf{i}\frac{\partial x}{\partial u} + \mathbf{j}\frac{\partial y}{\partial u} + \mathbf{k}\frac{\partial z}{\partial u}\right)$$

$$= \mathbf{e}_u L_u \left(-\frac{1}{L_u^2}\right)\frac{\partial}{\partial u} L_u$$

$$+ \frac{1}{L_u}\left(\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}\mathbf{i} + \frac{\partial^2 y}{\partial u^2}\mathbf{j} + \frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\mathbf{k}\right) \qquad (3\text{-}91)$$

但由式(3-83)和(3-84),得

$$\mathbf{i} = \mathbf{e}_u \cos(u,x) + \mathbf{e}_v \cos(v,x) + \mathbf{e}_w \cos(w,x)$$

$$= \frac{\mathbf{e}_u}{L_u}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\mathbf{e}_v}{L_v}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\mathbf{e}_w}{L_w}\frac{\partial x}{\partial w} \qquad (3\text{-}92)$$

用同样的方法可证明:

$$\mathbf{j} = \frac{\mathbf{e}_u}{L_u}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\mathbf{e}_v}{L_v}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\mathbf{e}_w}{L_w}\frac{\partial y}{\partial w}$$

$$\mathbf{k} = \frac{\mathbf{e}_u}{L_u}\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\mathbf{e}_v}{L_v}\frac{\partial z}{\partial v} + \frac{\mathbf{e}_w}{L_w}\frac{\partial z}{\partial w} \qquad (3\text{-}93)$$

将式(3-92)和(3-93)代入(3-91),得

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{e}_u}{\partial u} = & -\frac{\mathbf{e}_u}{L_u}\frac{\partial L_u}{\partial u} + \frac{1}{L_u}\left\{\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}\left[\frac{\mathbf{e}_u}{L_u}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\mathbf{e}_v}{L_v}\frac{\partial x}{\partial v}\right.\right. \\
& \left. + \frac{\mathbf{e}_w}{L_w}\frac{\partial x}{\partial w}\right] + \frac{\partial^2 y}{\partial u^2}\left[\frac{\mathbf{e}_u}{L_u}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\mathbf{e}_v}{L_v}\frac{\partial y}{\partial v}\right. \\
& \left. + \frac{\mathbf{e}_w}{L_w}\frac{\partial y}{\partial w}\right] + \frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\left[\frac{\mathbf{e}_u}{L_u}\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\mathbf{e}_v}{L_v}\frac{\partial z}{\partial v}\right. \\
& \left.\left. + \frac{\mathbf{e}_w}{L_w}\frac{\partial z}{\partial w}\right]\right\} \\
= & -\frac{\mathbf{e}_u}{L_u}\frac{\partial L_u}{\partial u} + \frac{\mathbf{e}_u}{L_u^2}\left[\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}\cdot\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial^2 y}{\partial u^2}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}\right. \\
& \left. + \frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\cdot\frac{\partial z}{\partial u}\right] + \frac{\mathbf{e}_v}{L_u L_v}\left[\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}\cdot\frac{\partial x}{\partial v}\right. \\
& \left. + \frac{\partial^2 y}{\partial u^2}\cdot\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\cdot\frac{\partial z}{\partial v}\right] \\
& + \frac{\mathbf{e}_w}{L_u L_w}\left[\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}\cdot\frac{\partial x}{\partial w} + \frac{\partial^2 y}{\partial u^2}\cdot\frac{\partial y}{\partial w}\right. \\
& \left. + \frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\cdot\frac{\partial z}{\partial w}\right]
\end{aligned} \tag{3-94}
$$

由于按定义

$$L_u^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2$$

故

$$\frac{\partial L_u^2}{\partial u} = 2\left(\frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} + \frac{\partial y}{\partial u}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial u^2} + \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\right)$$

即

$$
\begin{aligned}
& \frac{\partial^2 x}{\partial u^2}\cdot\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial^2 y}{\partial u^2}\cdot\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\cdot\frac{\partial z}{\partial u} \\
= & \frac{1}{2}\frac{\partial L_u^2}{\partial u} = L_u\frac{\partial L_u}{\partial u}
\end{aligned} \tag{3-95}
$$

因根据正交条件

$$\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} = 0$$

对 u 微分、并移项,得

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial^2 y}{\partial u^2}\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\frac{\partial z}{\partial v}$$

$$=-\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial^2 x}{\partial u\partial v}-\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial^2 y}{\partial u\partial v}-\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}$$

$$=-\frac{1}{2}\frac{\partial L_u^2}{\partial v}=-L_u\frac{\partial L_u}{\partial v} \tag{3-96}$$

又因

$$\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial w}+\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial w}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial w}=0$$

对 u 微分,得

$$\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial^2 x}{\partial u\partial w}+\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial^2 y}{\partial w}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial w}$$

$$=-\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}\frac{\partial x}{\partial w}-\frac{\partial^2 y}{\partial u^2}\frac{\partial y}{\partial w}-\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\frac{\partial z}{\partial w}$$

$$=-\frac{1}{2}\frac{\partial L_u^2}{\partial w}=-L_u\frac{\partial L_u}{\partial w} \tag{3-97}$$

将式(3-95),(3-96)和(3-97)代入式(3-94),最后得

$$\frac{\partial \mathbf{e}_u}{\partial u}=\frac{-\mathbf{e}_u}{L_u}\frac{\partial L_u}{\partial u}+\frac{\mathbf{e}_u}{L_u}\frac{\partial L_u}{\partial u}+\frac{\mathbf{e}_v}{L_uL_v}\left(-L_u\frac{\partial L_u}{\partial v}\right)$$

$$+\frac{\mathbf{e}_w}{L_uL_w}\left(-L_u\frac{\partial L_u}{\partial w}\right)$$

$$=-\frac{\mathbf{e}_v}{L_v}\frac{\partial L_u}{\partial v}-\frac{\mathbf{e}_w}{L_w}\frac{\partial L_u}{\partial w}$$

这就是我们要证明的公式。

3-4-3 关于 $\mathbf{e}_u,\mathbf{e}_v,\mathbf{e}_w$ 导数的另一些公式

在这一节中,我们来推导一组下面将经常用到的关于 $\mathbf{e}_u$, $\mathbf{e}_v$, $\mathbf{e}_w$ 导数的公式。

设 $\mathbf{r}$ 为某一点的矢径。由全微分公式得

$$d\mathbf{r}=\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}du+\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}dv+\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w}dw \tag{3-98}$$

另一方面，$d\mathbf{r}$ 分解为分量之和的表达式为

$$\begin{aligned}d\mathbf{r}&=L_u du\mathbf{e}_u+L_v dv\mathbf{e}_v+L_w dw\mathbf{e}_w\\&=L_u\mathbf{e}_u du+L_v\mathbf{e}_v dv+L_w\mathbf{e}_w dw\end{aligned} \tag{3-99}$$

比较式(3-98)和(3-99)，可见

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}=L_u\mathbf{e}_u\quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}=L_v\mathbf{e}_v\quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w}=L_w\mathbf{e}_w \tag{3-100}$$

由此得

$$\begin{cases}\dfrac{\partial(L_u\mathbf{e}_u)}{\partial v}=\dfrac{\partial(L_v\mathbf{e}_v)}{\partial u} & \left(因\ \dfrac{\partial^2\mathbf{r}}{\partial u\,\partial v}=\dfrac{\partial^2\mathbf{r}}{\partial v\,\partial u}\right)\\ \dfrac{\partial(L_u\mathbf{e}_u)}{\partial w}=\dfrac{\partial(L_w\mathbf{e}_w)}{\partial u} \\ \dfrac{\partial(L_v\mathbf{e}_v)}{\partial w}=\dfrac{\partial(L_w\mathbf{e}_w)}{\partial v}\end{cases} \tag{3-101}$$

这就是我们所要证明的一组公式。

3-4-4 divF 在正交曲线坐标系中的表达式

在矢量分析一章中，我们曾证明

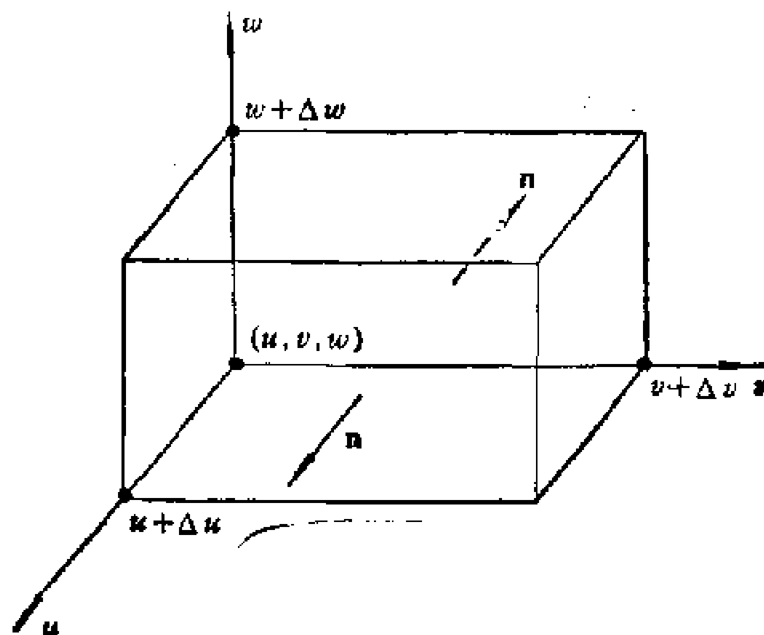


图 3-14 坐标系统

$$\operatorname{div}\mathbf{F} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\oint_s (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n})\, dS}{\Delta V} \tag{3-102}$$

式中，S 为包围 ΔV 的曲面，$\mathbf{n}$ 为 S 上朝外的单位法矢量。

由图 3-14 可见，式(3-102)中分子内的积分可表示为

$$\begin{aligned}
&\oint_s \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS \\
&= [(L_v L_w F_u)_{u+\Delta u} - (L_v L_w F_u)_u] dv dw \\
&\quad + [(L_u L_w F_v)_{v+\Delta v} - (L_u L_w F_v)_v] du dw \\
&\quad + [(L_u L_v F_w)_{w+\Delta w} - (L_u L_v F_w)_w] du dv
\end{aligned}$$

因

$$\Delta V = L_u L_v L_w du dv dw$$

得

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}\mathbf{F} &= \frac{1}{L_u L_v L_w\, du dv dw} \\
&\quad \cdot \left[\frac{\partial(L_v L_w F_u)}{\partial u} + \frac{\partial(L_u L_w F_v)}{\partial v} + \frac{\partial(L_u L_v F_w)}{\partial w}\right] du dv dw \\
&= \frac{1}{L_u L_v L_w}\left[\frac{\partial(L_v L_w F_u)}{\partial u} + \frac{\partial(L_w L_u F_v)}{\partial v} + \frac{\partial(L_u L_v F_w)}{\partial w}\right]
\end{aligned} \tag{3-103}$$

这就是 div $\mathbf{F}$ 在正交曲线坐标系中的表达式.

3-4-5 rot $\mathbf{F}$ 在正交曲线坐标系中的表达式

在矢量分析一章中我们曾证明。

$$\operatorname{rot}\mathbf{F} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\oint_s \mathbf{n} \times \mathbf{F}\, dS}{\Delta V} \tag{3-104}$$

式中 S，$\mathbf{n}$ 的意义和式(3-102)中的一样。

由图 3-14 可见，式(3-104)中分子内的积分可表示为

$$
\begin{aligned}
&\oint \mathbf{n} \times \mathbf{F}\, dS \\
&= L_v L_w dv dw \mathbf{e}_u \times (F_u \mathbf{e}_u + F_v \mathbf{e}_v + F_w \mathbf{e}_w)|_{u+\Delta u} \\
&\quad + L_w L_u dw du \mathbf{e}_v \times (F_u \mathbf{e}_u + F_v \mathbf{e}_v + F_w \mathbf{e}_w)|_{v+\Delta v} \\
&\quad + L_u L_v du dv \mathbf{e}_w \times (F_u \mathbf{e}_u + F_v \mathbf{e}_v + F_w \mathbf{e}_w)|_{w+\Delta w} \\
&\quad - L_v L_w dv dw \mathbf{e}_u \times (F_u \mathbf{e}_u + F_v \mathbf{e}_v + F_w \mathbf{e}_w)|_{u} \\
&\quad - L_w L_u dw du \mathbf{e}_v \times (F_u \mathbf{e}_u + F_v \mathbf{e}_v + F_w \mathbf{e}_w)|_{v} \\
&\quad - L_u L_v du dv \mathbf{e}_w \times (F_u \mathbf{e}_u + F_v \mathbf{e}_v + F_w \mathbf{e}_w)|_{w} \\
&= L_v L_w dv dw (\mathbf{e}_w F_v - \mathbf{e}_v F_w)|_{u+\Delta u} \\
&\quad - L_v L_w dv dw (\mathbf{e}_w F_v - \mathbf{e}_v F_w)|_{u} \\
&\quad + L_w L_u dw du (\mathbf{e}_u F_w - \mathbf{e}_w F_u)|_{v+\Delta v} \\
&\quad - L_w L_u dw du (\mathbf{e}_u F_w - \mathbf{e}_w F_u)|_{v} \\
&\quad + L_u L_v du dv (\mathbf{e}_v F_u - \mathbf{e}_u F_v)|_{w+\Delta w} \\
&\quad - L_u L_v du dv (\mathbf{e}_v F_u - \mathbf{e}_u F_v)|_{w} \\
&= \frac{\partial}{\partial u}(L_v L_w F_v \mathbf{e}_w - L_v L_w F_w \mathbf{e}_v) dv dw du \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial v}(L_w L_u F_w \mathbf{e}_u - L_w L_u F_u \mathbf{e}_w) dw du dv \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial w}(L_u L_v F_u \mathbf{e}_v - L_u L_v F_v \mathbf{e}_u) du dv dw
\end{aligned}
$$

因

$$
\Delta V = L_u L_v L_w du dv dw
$$

于是得:

$$
\begin{aligned}
\operatorname{rot} \mathbf{F} = \frac{1}{L_u L_v L_w} \Big[& \frac{\partial}{\partial u}(L_v L_w F_v \mathbf{e}_w - L_v L_w F_w \mathbf{e}_v) \\
& + \frac{\partial}{\partial v}(L_w L_u F_w \mathbf{e}_u - L_w L_u F_u \mathbf{e}_w) \\
& + \frac{\partial}{\partial w}(L_u L_v F_u \mathbf{e}_v - L_u L_v F_v \mathbf{e}_u) \Big]
\end{aligned}
$$

上式可以展开如下:

$$
\operatorname{rot} \mathbf{F} = \frac{1}{L_u L_v L_w} \Big[L_w \mathbf{e}_w \frac{\partial}{\partial u}(L_v F_v) + L_v F_v \frac{\partial (L_w \mathbf{e}_w)}{\partial u}
$$

$$
\begin{aligned}
&- L_v\mathbf{e}_v \frac{\partial}{\partial u}(L_w F_w) - L_w F_w \frac{\partial(L_v\mathbf{e}_v)}{\partial u} \\
&+ L_u\mathbf{e}_u \frac{\partial}{\partial v}(L_w F_w) + L_w F_w \frac{\partial(L_u\mathbf{e}_u)}{\partial v} \\
&- L_w\mathbf{e}_w \frac{\partial}{\partial v}(L_u F_u) - L_u F_u \frac{\partial(L_w\mathbf{e}_w)}{\partial v} \\
&+ L_v\mathbf{e}_v \frac{\partial}{\partial w}(L_u F_u) + L_u F_u \frac{\partial(L_v\mathbf{e}_v)}{\partial w} \\
&- L_u\mathbf{e}_u \frac{\partial}{\partial w}(L_v F_v) - L_v F_v \frac{\partial(L_u\mathbf{e}_u)}{\partial w}\Bigg].
\end{aligned}
$$

利用公式(3-101)

$$
\frac{\partial(L_w\mathbf{e}_w)}{\partial u} = \frac{\partial(L_u\mathbf{e}_u)}{\partial w}
$$

$$
\frac{\partial(L_v\mathbf{e}_v)}{\partial u} = \frac{\partial(L_u\mathbf{e}_u)}{\partial v}
$$

$$
\frac{\partial(L_w\mathbf{e}_w)}{\partial v} = \frac{\partial(L_v\mathbf{e}_v)}{\partial w}
$$

上式中右半边六项互相抵消，由此得

$$
\begin{aligned}
\operatorname{rot}\mathbf{F} = \frac{1}{L_u L_v L_w}\Bigg\{ & L_u\mathbf{e}_u\left[\frac{\partial}{\partial v}(L_w F_w) - \frac{\partial}{\partial w}(L_v F_v)\right] \\
& + L_v\mathbf{e}_v\left[\frac{\partial}{\partial w}(L_u F_u) - \frac{\partial}{\partial u}(L_w F_w)\right] \\
& + L_w\mathbf{e}_w\left[\frac{\partial}{\partial u}(L_v F_v) - \frac{\partial}{\partial v}(L_u F_u)\right]\Bigg\}
\end{aligned} \tag{3-105}
$$

容易验证，(3-105)可以写成下列便于记忆的行列式形式：

$$
\operatorname{rot}\mathbf{F} = \frac{1}{L_u L_v L_w}\begin{vmatrix} L_u\mathbf{e}_u & L_v\mathbf{e}_v & L_w\mathbf{e}_w \\ \dfrac{\partial}{\partial u} & \dfrac{\partial}{\partial v} & \dfrac{\partial}{\partial w} \\ L_u F_u & L_v F_v & L_w F_w \end{vmatrix} \tag{3-106}
$$

这就是我们要推导的 rot $\mathbf{F}$ 在正交曲线坐标系统中的表达式。

3-4-6 grad$f$ 在正交曲线坐标系中的表达式

我们在矢量分析一章中曾证明

$$\operatorname{grad} f = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\oint_S \mathbf{n} f dS}{\Delta V} \tag{3-107}$$

由图 3-14 可见,式(3-107)内分子中的积分可表示为

$$\begin{aligned}
&\oint_S \mathbf{n} f dS \\
&= L_v L_w dv dw f \mathbf{e}_u |_{u+\Delta u} - L_v L_w dv dw f \mathbf{e}_u |_u \\
&\quad + L_w L_u dw du f \mathbf{e}_v |_{v+\Delta v} - L_w L_u dw du f \mathbf{e}_v |_v \\
&\quad + L_u L_v du dv f \mathbf{e}_w |_{w+\Delta w} - L_u L_v du dv f \mathbf{e}_w |_w \\
&= \frac{\partial(L_v L_w f \mathbf{e}_u)}{\partial u} du dv dw + \frac{\partial(L_w L_u f \mathbf{e}_v)}{\partial v} du dv dw \\
&\quad + \frac{\partial(L_u L_v f \mathbf{e}_w)}{\partial w} du dv dw
\end{aligned}$$

因

$$\Delta V = L_u L_v L_w du dv dw$$

于是得

$$\begin{aligned}
\operatorname{grad} f = \frac{1}{L_u L_v L_w} \Big[& \frac{\partial(L_v L_w f \mathbf{e}_u)}{\partial u} + \frac{\partial(L_w L_u f \mathbf{e}_v)}{\partial v} \\
& + \frac{\partial(L_u L_v f \mathbf{e}_w)}{\partial w} \Big]
\end{aligned} \tag{3-108}$$

但

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(L_v L_w f \mathbf{e}_u)}{\partial u} &= L_v L_w \mathbf{e}_u \frac{\partial f}{\partial u} + f \frac{\partial(L_v L_w \mathbf{e}_u)}{\partial u} \\
&= L_v L_w \mathbf{e}_u \frac{\partial f}{\partial u} + f \frac{\partial(L_v L_w \mathbf{e}_v \times \mathbf{e}_w)}{\partial u} \\
&= L_v L_w \mathbf{e}_u \frac{\partial f}{\partial u} + f L_v \mathbf{e}_v \times \frac{\partial(L_w \mathbf{e}_w)}{\partial u} \\
&\quad - f L_w \mathbf{e}_w \times \frac{\partial(L_v \mathbf{e}_v)}{\partial u}
\end{aligned}$$

同理

$$\frac{\partial(L_w L_u f \mathbf{e}_v)}{\partial v} = L_w L_u \mathbf{e}_v \frac{\partial f}{\partial v} + f L_w \mathbf{e}_w \times \frac{\partial(L_u \mathbf{e}_u)}{\partial v} - f L_u \mathbf{e}_u \times \frac{\partial(L_w \mathbf{e}_w)}{\partial v}$$

$$\frac{\partial(L_u L_v f \mathbf{e}_w)}{\partial w} = L_u L_v \mathbf{e}_w \frac{\partial f}{\partial w} + f L_u \mathbf{e}_u \times \frac{\partial(L_v \mathbf{e}_v)}{\partial v} - f L_v \mathbf{e}_v \times \frac{\partial(L_u \mathbf{e}_u)}{\partial w}$$

代入式(3-108),得

$$\begin{aligned} \operatorname{grad} f = \frac{1}{L_u L_v L_w} \Big[& L_v L_w \mathbf{e}_u \frac{\partial f}{\partial u} + f L_v \mathbf{e}_v \times \frac{\partial(L_w \mathbf{e}_w)}{\partial u} - f L_v \mathbf{e}_v \times \frac{\partial(L_u \mathbf{e}_u)}{\partial w} \\ & + L_w L_u \mathbf{e}_v \frac{\partial f}{\partial v} + f L_w \mathbf{e}_w \times \frac{\partial(L_u \mathbf{e}_u)}{\partial v} - f L_w \mathbf{e}_w \times \frac{\partial(L_v \mathbf{e}_v)}{\partial w} \\ & + L_u L_v \mathbf{e}_w \frac{\partial f}{\partial w} + f L_u \mathbf{e}_u \times \frac{\partial(L_v \mathbf{e}_v)}{\partial w} - f L_u \mathbf{e}_u \times \frac{\partial(L_w \mathbf{e}_w)}{\partial v} \Big] \end{aligned} \tag{3-109}$$

但由于式(3-101)

$$\frac{\partial(L_w \mathbf{e}_w)}{\partial u} = \frac{\partial(L_u \mathbf{e}_u)}{\partial w}, \quad \frac{\partial(L_u \mathbf{e}_u)}{\partial v} = \frac{\partial(L_v \mathbf{e}_v)}{\partial u}$$

$$\frac{\partial(L_v \mathbf{e}_v)}{\partial w} = \frac{\partial(L_w \mathbf{e}_w)}{\partial v}$$

故式(3-109)中右边 6 项互相抵消,最后得

$$\operatorname{grad} f = \frac{\mathbf{e}_u}{L_u}\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\mathbf{e}_v}{L_v}\frac{\partial f}{\partial v} + \frac{\mathbf{e}_w}{L_w}\frac{\partial f}{\partial w} \tag{3-110}$$

这就是我们要证明的 $\operatorname{grad} f$ 在正交曲线坐标系中的表达式。

3-4-7 方向导数 $(\mathbf{a}\cdot\nabla)\mathbf{b}$ 在正交曲线坐标系中的表达式

在矢量分析一章中，我们已经证明 $(\mathbf{a}\cdot\nabla)\mathbf{b}$ 的表达式是

$$(\mathbf{a}\cdot\nabla)\mathbf{b}=\lim_{\Delta V\to 0}\frac{\oint_S(\mathbf{a}\cdot\mathbf{n})\mathbf{b}\,dS}{\Delta V} \tag{3-111}$$

式中的 $\mathbf{a}$ 在积分和微分时都应视为常数。

由图 3-14 可见，式(3-111)中分子内的积分可表示为

$$\begin{aligned}
&\oint_S(\mathbf{a}\cdot\mathbf{n})\mathbf{b}dS\\
&=(\mathbf{a}\cdot\mathbf{e}_u)\mathbf{b}L_vL_w dvdw|_{u+\Delta u}-(\mathbf{a}\cdot\mathbf{e}_u)\mathbf{b}L_vL_w dvdw|_u\\
&\quad+(\mathbf{a}\cdot\mathbf{e}_v)\mathbf{b}L_wL_u dwdu|_{v+\Delta v}-(\mathbf{a}\cdot\mathbf{e}_v)\mathbf{b}L_wL_u dwdu|_v\\
&\quad+(\mathbf{a}\cdot\mathbf{e}_w)\mathbf{b}L_uL_v dudv|_{w+\Delta w}-(\mathbf{a}\cdot\mathbf{e}_w)\mathbf{b}L_uL_v dudv|_w\\
&=\frac{\partial((\mathbf{a}\cdot\mathbf{e}_u)\mathbf{b}L_vL_w)}{\partial u}dudvdw\\
&\quad+\frac{\partial((\mathbf{a}\cdot\mathbf{e}_v)\mathbf{b}L_wL_u)}{\partial v}dudvdw\\
&\quad+\frac{\partial((\mathbf{a}\cdot\mathbf{e}_w)\mathbf{b}L_uL_v)}{\partial w}dudvdw
\end{aligned}$$

因

$$\Delta V=L_uL_vL_w dudvdw$$

于是得

$$(\mathbf{a}\cdot\nabla)\mathbf{b}=\left[\frac{\partial((\mathbf{a}\cdot\mathbf{e}_u)\mathbf{b}L_vL_w)}{\partial u}+\frac{\partial((\mathbf{a}\cdot\mathbf{e}_v)\mathbf{b}L_wL_u)}{\partial v}+\frac{\partial((\mathbf{a}\cdot\mathbf{e}_w)\mathbf{b}L_uL_v)}{\partial w}\right] \tag{3-112}$$

但

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial((\mathbf{a}\cdot\mathbf{e}_u)\mathbf{b}L_vL_w)}{\partial u}\\
&=(\mathbf{a}\cdot\mathbf{e}_u)L_vL_w\frac{\partial\mathbf{b}}{\partial u}+\mathbf{b}\left(\mathbf{a}\cdot\frac{\partial(L_vL_w\mathbf{e}_u)}{\partial u}\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= a_u L_v L_w \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial u} + \mathbf{b}\left(\mathbf{a} \cdot \frac{\partial(L_v \mathbf{e}_v \times L_w \mathbf{e}_w)}{\partial u}\right) \\
&= a_u L_v L_w \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial u} + \mathbf{b}\left(\mathbf{a} \cdot \left[L_v \mathbf{e}_v \times \frac{\partial(L_w \mathbf{e}_w)}{\partial u}\right]\right) \\
&\qquad - \mathbf{b}\left(\mathbf{a} \cdot \left[L_w \mathbf{e}_w \times \frac{\partial(L_v \mathbf{e}_v)}{\partial u}\right]\right)
\end{aligned} \tag{3-113}
$$

同理

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial((\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_v)\mathbf{b} L_w L_u)}{\partial v} \\
&= a_v L_w L_u \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial v} + \mathbf{b}\left(\mathbf{a} \cdot \left[L_w \mathbf{e}_w \times \frac{\partial(L_u \mathbf{e}_u)}{\partial v}\right]\right) \\
&\qquad - \mathbf{b}\left(\mathbf{a} \cdot \left[L_u \mathbf{e}_u \times \frac{\partial(L_w \mathbf{e}_w)}{\partial v}\right]\right)
\end{aligned} \tag{3-114}
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial((\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_w)\mathbf{b} L_u L_v)}{\partial w} \\
&= a_w L_u L_v \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial w} + \mathbf{b}\left(\mathbf{a} \cdot \left[L_u \mathbf{e}_u \times \frac{\partial(L_v \mathbf{e}_v)}{\partial w}\right]\right) \\
&\qquad - \mathbf{b}\left(\mathbf{a} \cdot \left[L_v \mathbf{e}_v \times \frac{\partial(L_u \mathbf{e}_u)}{\partial w}\right]\right)
\end{aligned} \tag{3-115}
$$

将式(3-113),(3-114)和(3-115)代入式(3-112),并利用关系式

$$
\frac{\partial(L_w \mathbf{e}_w)}{\partial u} = \frac{\partial(L_u \mathbf{e}_u)}{\partial w}, \quad \frac{\partial(L_u \mathbf{e}_u)}{\partial v} = \frac{\partial(L_v \mathbf{e}_v)}{\partial u}
$$

$$
\frac{\partial(L_v \mathbf{e}_v)}{\partial w} = \frac{\partial(L_w \mathbf{e}_w)}{\partial v}
$$

后,得

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{a} \cdot \nabla)\mathbf{b} &= \frac{1}{L_u L_v L_w} \cdot \left[a_u \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial u} L_v L_w + a_v \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial v} L_w L_u \right. \\
&\qquad \left. + a_w \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial w} L_u L_v\right] \\
&= \frac{a_u}{L_u} \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial u} + \frac{a_v}{L_v} \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial v} + \frac{a_w}{L_w} \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial w}
\end{aligned} \tag{3-116}
$$

这就是 $(\mathbf{a} \cdot \nabla)\mathbf{b}$ 在正交曲线坐标系中的表达式。

将 $\mathbf{b} = b_u\mathbf{e}_u + b_v\mathbf{e}_v + b_w\mathbf{e}_w$ 代入式(3-116)并利用单位矢量导数公式，可以写出 $(\mathbf{a}\cdot\nabla)\mathbf{b}$ 的 u,v,w 分量。因为表达式较繁复，所以这里不具体写出了。

3-5 gradφ, div$\mathbf{E}$, rot$\mathbf{E}$ 在不同正交曲线坐标系中的具体表达式

在 3-4 节中，我们已经推导出了 gradφ, div$\mathbf{E}$, rot$\mathbf{E}$ 在正交曲线坐标系中的一般表达式：

$$\mathrm{grad}\varphi = \frac{\mathbf{e}_u}{L_u}\frac{\partial\varphi}{\partial u} + \frac{\mathbf{e}_v}{L_v}\frac{\partial\varphi}{\partial v} + \frac{\mathbf{e}_w}{L_w}\frac{\partial\varphi}{\partial w} \tag{3-117}$$

$$\mathrm{div}\,\mathbf{E} = \frac{1}{L_uL_vL_w}\left[\frac{\partial(L_vL_wE_u)}{\partial u} + \frac{\partial(L_wL_uE_v)}{\partial v} + \frac{\partial(L_uL_vE_w)}{\partial w}\right] \tag{3-118}$$

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{E} = \frac{1}{L_uL_vL_w}\begin{vmatrix} L_u\mathbf{e}_u & L_v\mathbf{e}_v & L_w\mathbf{e}_w \\ \dfrac{\partial}{\partial u} & \dfrac{\partial}{\partial v} & \dfrac{\partial}{\partial w} \\ L_uE_u & L_vE_v & L_wE_w \end{vmatrix} \tag{3-119}$$

式中的 L_u, L_v, L_w 为度量系数。

由公式(3-117)至(3-119)可见，要写出 gradφ,div$\mathbf{E}$,rot$\mathbf{E}$ 在具体正交曲线坐标系中的表达式，关键是必须知道 L_u, L_v, L_w 的表达式。将这些表达式代入式(3-117)至(3-119)后，就可以立即得到 gradφ,div$\mathbf{E}$,rot$\mathbf{E}$ 的具体表达式。

在 3-2 节中，我们已经对不同的具体正交曲线坐标系求出了 L_u, L_v, L_w 表达式。本节将进一步把这些表达式代入式(3-117)至(3-119)中，具体写出 gradφ, div$\mathbf{E}$, rot$\mathbf{E}$ 的表达式。下列结果主要供读者使用时查阅，免得每次重新推导。

(1) 直角坐标系[1]

---

1) 在直角坐标系中，

$$\mathbf{e}_x = \mathbf{i},\quad \mathbf{e}_y = \mathbf{j},\quad \mathbf{e}_z = \mathbf{k}$$

$$u = x, \quad v = y, \quad w = z$$

$$L_u = 1, \quad L_v = 1, \quad L_w = 1$$

代入式(3-117)至(3-119)，得

$$\operatorname{grad}\varphi = \mathbf{i}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial\varphi}{\partial z} \tag{3-120}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \tag{3-121}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{rot}\mathbf{E} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} \\ &= \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}\right)\mathbf{j} \\ &\quad + \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right)\mathbf{k} \end{aligned} \tag{3-122}$$

（2）圆柱面坐标系

$$u = r \quad v = \phi \quad w = z$$

$$L_u = 1 \quad L_v = r \quad L_w = 1$$

代入式(3-117)至(3-119)，得

$$\operatorname{grad}\varphi = \mathbf{e}_r\frac{\partial\varphi}{\partial r} + \frac{\mathbf{e}_\phi}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r} + \mathbf{e}_z\frac{\partial\varphi}{\partial z} \tag{3-123}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{div}\mathbf{E} &= \frac{1}{r}\left[\frac{\partial(rE_r)}{\partial r} + \frac{\partial E_\phi}{\partial\phi} + \frac{\partial(rE_z)}{\partial z}\right] \\ &= \frac{\partial E_r}{\partial r} + \frac{E_r}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial E_\phi}{\partial\phi} + \frac{\partial E_z}{\partial z}\end{aligned} \tag{3-124}$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = \frac{1}{r}\begin{vmatrix} \mathbf{e}_r & r\mathbf{e}_\phi & \mathbf{e}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{\partial}{\partial\phi} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ E_r & rE_\phi & E_z \end{vmatrix} \tag{3-125}$$

（3）球坐标系

$$u = r, \quad v = \theta, \quad w = \phi$$

$$L_u = 1, \quad L_v = r, \quad L_w = r\sin\theta$$

代入式(3-117)至(3-119),得

$$\mathrm{grad}\ \varphi = \mathbf{e}_r \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\mathbf{e}_\theta}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} + \frac{\mathbf{e}_\phi}{r \sin\theta} \frac{\partial \varphi}{\partial \phi} \tag{3-126}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{div}\ \mathbf{E} &= \frac{1}{r^2 \sin\theta} \left[\frac{\partial}{\partial r}(r^2 \sin\theta E_r) + \frac{\partial}{\partial \theta}(r \sin\theta E_\theta) + \frac{\partial}{\partial \phi}(r E_\phi)\right] \\ &= \frac{\partial E_r}{\partial r} + \frac{2}{r} E_r + \frac{1}{r} \frac{\partial E_\theta}{\partial \theta} + \frac{E_\theta}{r} \mathrm{ctg}\,\theta + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial E_\phi}{\partial \phi}\end{aligned} \tag{3-127}$$

$$\mathrm{rot}\ \mathbf{E} = \frac{1}{r^2 \sin\theta} \begin{vmatrix} \mathbf{e}_r & r\mathbf{e}_\theta & r \sin\theta E_\phi \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \phi} \\ E_r & rE_\theta & r \sin\theta E_\phi \end{vmatrix} \tag{3-128}$$

此处行列式可按一般规则展开，展开式较繁，下面不再重复写出了。

(4) 椭圆柱面坐标

$$u = \eta,\ v = \phi,\ w = z$$

$$L_u = a\sqrt{\mathrm{ch}^2\eta - \cos^2\phi},\ L_v = a\sqrt{\mathrm{ch}^2\eta - \cos^2\phi},$$
$$L_w = 1$$

代入式(3-117)至(3-119),得

$$\mathrm{grad}\varphi = \frac{\mathbf{e}_\eta}{a\sqrt{\mathrm{ch}^2\eta - \cos^2\phi}} \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} + \frac{\mathbf{e}_\phi}{a\sqrt{\mathrm{ch}^2\eta - \cos^2\phi}} \frac{\partial \varphi}{\partial \phi} + \mathbf{e}_z \frac{\partial \varphi}{\partial z} \tag{3-129}$$

$$\mathrm{div}\ \mathbf{E} = \frac{1}{a(\mathrm{ch}^2\eta - \cos^2\phi)} \left[\frac{\partial(\sqrt{\mathrm{ch}^2\eta - \cos^2\phi}\, E_\eta)}{\partial \eta} + \frac{\partial(\sqrt{\mathrm{ch}^2\eta - \cos^2\phi}\, E_\phi)}{\partial \phi}\right] + \frac{\partial E_z}{\partial z} \tag{3-130}$$

$$\text{rot}\,\mathbf{E} = \frac{1}{a^2(\text{ch}^2\eta - \cos^2\phi)} \cdot \begin{vmatrix} a\sqrt{\text{ch}^2\eta - \cos^2\phi}\,\mathbf{e}_\eta & a\sqrt{\text{ch}^2\eta - \cos^2\phi}\,\mathbf{e}_\phi & \mathbf{e}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial \eta} & \dfrac{\partial}{\partial \phi} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ a\sqrt{\text{ch}^2\eta - \cos^2\phi}\,E_\eta & a\sqrt{\text{ch}^2\eta - \cos^2\phi}\,E_\phi & E_z \end{vmatrix} \tag{3-131}$$

(5) 抛物柱面坐标系

$$u = \mu, \quad v = \nu, \quad w = z$$

$$L_u = \sqrt{\mu^2 + \nu^2}, \quad L_v = \sqrt{\mu^2 + \nu^2}, \quad L_w = 1$$

代入式(3-117)至(3-119),得

$$\text{grad}\,\varphi = \frac{\mathbf{e}_\mu}{\sqrt{\mu^2 + \nu^2}} \frac{\partial \varphi}{\partial \mu} + \frac{\mathbf{e}_\nu}{\sqrt{\mu^2 + \nu^2}} \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} + \mathbf{e}_z \frac{\partial \varphi}{\partial z} \tag{3-132}$$

$$\text{div}\,\mathbf{E} = \frac{1}{(\mu^2 + \nu^2)} \left[\frac{\partial}{\partial \mu} (\sqrt{\mu^2 + \nu^2}\,E_\mu) + \frac{\partial}{\partial \nu} (\sqrt{\mu^2 + \nu^2}\,E_\nu) \right] + \frac{\partial E_z}{\partial z} \tag{3-133}$$

$$\text{rot}\,\mathbf{E} = \frac{1}{\mu^2 + \nu^2} \cdot \begin{vmatrix} \sqrt{\mu^2 + \nu^2}\,\mathbf{e}_\mu & \sqrt{\mu^2 + \nu^2}\,\mathbf{e}_\nu & \mathbf{e}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial \mu} & \dfrac{\partial}{\partial \nu} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \sqrt{\mu^2 + \nu^2}\,E_\mu & \sqrt{\mu^2 + \nu^2}\,E_\nu & E_z \end{vmatrix} \tag{3-134}$$

(6) 旋转长椭球面坐标系

$$u = \eta, \quad v = \theta, \quad w = \phi$$

$$L_u = a\sqrt{\text{sh}^2\eta + \sin^2\theta}, \quad L_v = a\sqrt{\text{sh}^2\eta + \sin^2\theta},$$
$$L_w = a\,\text{sh}\,\eta\,\sin\theta$$

代入式(3-117)至(3-119),得

$$\operatorname{grad}\varphi=\frac{\mathbf{e}_\eta}{a\sqrt{\operatorname{sh}^2\eta+\sin^2\theta}}\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}+\frac{\mathbf{e}_\theta}{a\sqrt{\operatorname{sh}^2\eta+\sin^2\theta}}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}+\frac{\mathbf{e}_\psi}{a\operatorname{sh}\psi\sin\theta}\frac{\partial\varphi}{\partial\psi} \tag{3-135}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{div}\mathbf{E}=&\frac{1}{a(\operatorname{sh}^2\eta+\sin^2\theta)}\cdot\left[\frac{1}{\operatorname{sh}\eta}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\sqrt{\operatorname{sh}^2\eta+\sin^2\theta}\operatorname{sh}\eta E_\eta\right)\right.\\&\left.+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sqrt{\operatorname{sh}^2\eta+\sin^2\theta}\sin\theta E_\theta\right)\right]\\&+\frac{1}{a\operatorname{sh}\eta\sin\theta}\frac{\partial E_\psi}{\partial\psi}\end{aligned} \tag{3-136}$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{E}=\frac{1}{a(\operatorname{sh}^2\eta+\sin^2\theta)\operatorname{sh}\eta\sin\theta}\cdot\begin{vmatrix}\sqrt{\operatorname{sh}^2\eta+\sin^2\theta}\,\mathbf{e}_\eta & \sqrt{\operatorname{sh}^2\eta+\sin^2\theta}\,\mathbf{e}_\theta & \operatorname{sh}\eta\sin\theta\mathbf{e}_\psi\\ \dfrac{\partial}{\partial\eta} & \dfrac{\partial}{\partial\theta} & \dfrac{\partial}{\partial\psi}\\ \sqrt{\operatorname{sh}^2\eta+\sin^2\theta}\,E_\eta & \sqrt{\operatorname{sh}^2\eta+\sin^2\theta}\,E_\theta & \operatorname{sh}\eta\sin\theta E_\psi\end{vmatrix} \tag{3-137}$$

(7) 旋转长椭球面坐标系

$$u=\eta,\quad v=\theta,\quad w=\psi$$

$$L_u=a\sqrt{\operatorname{sh}^2\eta+\sin^2\theta},\ L_v=a\sqrt{\operatorname{sh}^2\eta+\sin^2\theta},$$
$$L_w=a\operatorname{sh}\eta\sin\theta$$

代入式(3-117)至(3-119),得

$$\operatorname{grad}\varphi=\frac{\mathbf{e}_\eta}{a\sqrt{\operatorname{sh}^2\eta+\sin^2\theta}}\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}+\frac{\mathbf{e}_\theta}{a\sqrt{\operatorname{sh}^2\eta+\sin^2\theta}}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}+\frac{\mathbf{e}_\psi}{a\operatorname{sh}\eta\sin\theta}\frac{\partial\varphi}{\partial\psi} \tag{3-138}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{E}=\frac{1}{a(\operatorname{sh}^2\eta+\sin^2\theta)}\cdot\left[\frac{1}{\operatorname{sh}\eta}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\sqrt{\operatorname{sh}^2\eta+\sin^2\theta}\operatorname{sh}\eta E_\eta\right)\right.$$

$$+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sqrt{\mathrm{sh}^2\eta+\sin^2\theta}\sin\theta\, E_\theta\right)\Bigg]$$

$$+\frac{1}{a\,\mathrm{sh}\eta\sin\theta}\frac{\partial E_\phi}{\partial\phi} \tag{3-139}$$

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{E}=\frac{1}{a^3(\mathrm{sh}^2\eta+\sin^2\theta)\mathrm{sh}\eta\sin\theta}$$

$$\cdot\begin{vmatrix} a\sqrt{\mathrm{sh}^2\eta+\sin^2\theta}\,\mathbf{e}_\eta & a\sqrt{\mathrm{sh}^2\eta+\sin^2\theta}\,\mathbf{e}_\theta & a\,\mathrm{sh}\eta\sin\theta\mathbf{e}_\phi \\ \dfrac{\partial}{\partial\eta} & \dfrac{\partial}{\partial\theta} & \dfrac{\partial}{\partial\phi} \\ a\sqrt{\mathrm{sh}^2\eta+\sin^2\theta}\,E_\eta & a\sqrt{\mathrm{sh}^2\eta+\sin^2\theta}\,E_\theta & a\,\mathrm{sh}\eta\sin\theta E_\phi \end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{a\,(\mathrm{sh}^2\eta+\sin^2\theta)\mathrm{sh}\eta\sin\theta}$$

$$\cdot\begin{vmatrix} \sqrt{\mathrm{sh}^2\eta+\sin^2\theta}\,\mathbf{e}_\eta & \sqrt{\mathrm{sh}^2\eta+\sin^2\theta}\,\mathbf{e}_\theta & \mathrm{sh}\,\eta\sin\theta\mathbf{e}_\phi \\ \dfrac{\partial}{\partial\eta} & \dfrac{\partial}{\partial\theta} & \dfrac{\partial}{\partial\phi} \\ \sqrt{\mathrm{sh}^2\eta+\sin^2\theta}\,E_\eta & \sqrt{\mathrm{sh}^2\eta+\sin^2\theta}\,E_\theta & \mathrm{sh}\eta\sin\theta E_\phi \end{vmatrix} \tag{3-140}$$

(8) 旋转扁椭球面坐标

$$u=\eta,\quad v=\theta,\quad w=\phi$$

$$L_u=a\sqrt{\mathrm{ch}^2\eta-\sin^2\theta},\quad L_v=a\sqrt{\mathrm{ch}^2\eta-\sin^2\theta},$$

$$L_w=a\mathrm{ch}\eta\sin\theta$$

代入式(3-117)至(3-119),得

$$\mathrm{grad}\,\varphi=\frac{\mathbf{e}_\eta}{a\sqrt{\mathrm{ch}^2\eta-\sin^2\theta}}\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}+\frac{\mathbf{e}_\theta}{a\sqrt{\mathrm{ch}^2\eta-\sin^2\theta}}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}$$

$$+\frac{\mathbf{e}_\phi}{a\mathrm{ch}\eta\sin\theta}\frac{\partial\varphi}{\partial\phi} \tag{3-141}$$

$$\mathrm{div}\,\mathbf{E}=\frac{1}{a\,(\mathrm{ch}^2\eta-\sin^2\theta)}\Bigg[\frac{1}{\mathrm{ch}\eta}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\sqrt{\mathrm{ch}^2\eta-\sin^2\theta}\,\mathrm{sh}\eta E_\eta\right)$$

$$+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sqrt{\mathrm{ch}^2\eta-\sin^2\theta}\sin\theta\, E_\theta\right)\Bigg]$$

$$+\frac{1}{a\mathrm{ch}\eta\sin\theta}\frac{\partial E_\phi}{\partial\phi} \tag{3-142}$$

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{E}=\frac{1}{a^3(\mathrm{ch}^2\eta-\sin^2\theta)\mathrm{ch}\eta\sin\theta}$$

$$\cdot\begin{vmatrix} a\sqrt{\mathrm{ch}^2\eta-\sin^2\theta}\,\mathbf{e}_\eta & a\sqrt{\mathrm{ch}^2\eta-\sin^2\theta}\,\mathbf{e}_\theta & a\mathrm{ch}\eta\sin\theta\,\mathbf{e}_\phi \\ \frac{\partial}{\partial\eta} & \frac{\partial}{\partial\theta} & \frac{\partial}{\partial\phi} \\ a\sqrt{\mathrm{ch}^2\eta-\sin^2\theta}\,E_\eta & a\sqrt{\mathrm{ch}^2\eta-\sin^2\theta}\,E_\theta & a\mathrm{ch}\eta\sin\theta E_\phi \end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{a\,(\mathrm{ch}^2\eta-\sin^2\theta)\mathrm{ch}\eta\sin\theta}$$

$$\cdot\begin{vmatrix} \sqrt{\mathrm{ch}^2\eta-\sin^2\theta}\,\mathbf{e}_\eta & \sqrt{\mathrm{ch}^2\eta-\sin^2\theta}\,\mathbf{e}_\theta & \mathrm{ch}\,\eta\sin\theta\mathbf{e}_\phi \\ \frac{\partial}{\partial\eta} & \frac{\partial}{\partial\theta} & \frac{\partial}{\partial\phi} \\ \sqrt{\mathrm{ch}^2\eta-\sin^2\theta}\,E_\eta & \sqrt{\mathrm{ch}^2\eta-\sin^2\theta}\,E_\theta & \mathrm{ch}\,\eta\sin\theta E_\phi \end{vmatrix} \tag{3-143}$$

(9) 抛物面坐标系

$$u=\mu,\quad v=\nu,\quad w=\phi$$

$$L_u=\sqrt{\mu^2+\nu^2},\quad L_v=\sqrt{\mu^2+\nu^2},\quad L_w=\mu\nu$$

代入式(3-117)至(3-119),得

$$\mathrm{grad}\,\varphi=\frac{\mathbf{e}_\mu}{\sqrt{\mu^2+\nu^2}}\frac{\partial\varphi}{\partial\mu}+\frac{\mathbf{e}_\nu}{\sqrt{\mu^2+\nu^2}}\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}$$

$$+\frac{\mathbf{e}_\phi}{\mu\nu}\frac{\partial\varphi}{\partial\phi} \tag{3-144}$$

$$\mathrm{div}\,\mathbf{E}=\frac{1}{\mu^2+\nu^2}\left[\frac{1}{\mu}\frac{\partial}{\partial\mu}(\sqrt{\mu^2+\nu^2}\,\mu E_\mu)+\frac{1}{\nu}\frac{\partial}{\partial\nu}\right.$$

$$\left.\cdot(\sqrt{\mu^2+\nu^2}\,\nu E_\nu)\right]+\frac{1}{\mu\nu}\frac{\partial E_\phi}{\partial\phi} \tag{3-145}$$

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{E}=\frac{1}{\mu\nu(\mu^2+\nu^2)}$$

$$\cdot \begin{vmatrix} \sqrt{\mu^2+\nu^2}\,\mathbf{e}_\mu & \sqrt{\mu^2+\nu^2}\,\mathbf{e}_\nu & \mu\nu\mathbf{e}_\psi \\ \dfrac{\partial}{\partial \mu} & \dfrac{\partial}{\partial \nu} & \dfrac{\partial}{\partial \psi} \\ \sqrt{\mu^2+\nu^2}\,E_\mu & \sqrt{\mu^2+\nu^2}\,E_\nu & \mu\nu\,E_\psi \end{vmatrix} \tag{3-146}$$

(10) 锥面坐标系

$$u = r, \quad v = \theta, \quad w = \lambda$$

$$L_u = 1, \qquad L_v = \frac{r\sqrt{\theta^2-\lambda^2}}{\sqrt{(\theta^2-b^2)(c^2-\theta^2)}},$$

$$L_w = r\sqrt{\frac{\theta^2-\lambda^2}{(b^2-\lambda^2)(c^2-\lambda^2)}}$$

代入式(3-117)至(3-119),得

$$\operatorname{grad}\varphi = \mathbf{e}_r\frac{\partial\varphi}{\partial r} + \mathbf{e}_\theta\frac{\sqrt{(\theta^2-b^2)(c^2-\theta^2)}}{r\sqrt{\theta^2-\lambda^2}}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} + \frac{\mathbf{e}_\lambda\sqrt{(b^2-\lambda^2)(c^2-\lambda^2)}}{\sqrt{\theta^2-\lambda^2}}\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda} \tag{3-147}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{E} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2E_r) + \frac{1}{r(\theta^2-\lambda^2)} \cdot \Big[\sqrt{(\theta^2-b^2)(c^2-\theta^2)}\,\frac{\partial}{\partial\theta}\big(\sqrt{\theta^2-\lambda^2}\,E_\theta\big) + \sqrt{(b^2-\lambda^2)(c^2-\lambda^2)}\,\frac{\partial}{\partial\lambda}\big(\sqrt{\theta^2-\lambda^2}\,E_\lambda\big)\Big] \tag{3-148}$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = \frac{\sqrt{(\theta^2-b^2)(c^2-\theta^2)(b^2-\lambda^2)(c^2-\lambda^2)}}{\theta^2-\lambda^2} \cdot \begin{vmatrix} \dfrac{\mathbf{e}_r}{r} & \dfrac{\sqrt{\theta^2-\lambda^2}}{\sqrt{(\theta^2-b^2)(c^2-\theta^2)}}\mathbf{e}_\theta & \dfrac{\sqrt{\theta^2-\lambda^2}}{\sqrt{(b^2-\lambda^2)(c^2-\lambda^2)}}\mathbf{e}_\lambda \\ \dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{\partial}{\partial\theta} & \dfrac{\partial}{\partial\lambda} \\ \dfrac{E_r}{r} & \dfrac{\sqrt{\theta^2-\lambda^2}}{\sqrt{(\theta^2-b^2)(c^2-\theta^2)}}E_\theta & \dfrac{\sqrt{\theta^2-\lambda^2}}{\sqrt{(b^2-\lambda^2)(c^2-\lambda^2)}}E_\lambda \end{vmatrix} \tag{3-149}$$

(11) 椭球面坐标系

$$u=\eta,\quad v=\theta,\quad w=\lambda$$

$$L_u=\sqrt{\frac{(\eta^2-\lambda^2)(\eta^2-\theta^2)}{(\eta^2-b^2)(\eta^2-c^2)}},\quad L_v=\sqrt{\frac{(\eta^2-\theta^2)(\theta^2-\lambda^2)}{(\theta^2-b^2)(c^2-\theta^2)}},$$

$$L_w=\sqrt{\frac{(\eta^2-\lambda^2)(\theta^2-\lambda^2)}{(b^2-\lambda^2)(c^2-\lambda^2)}}$$

代入式(3-117)至(3-119),得

$$\begin{aligned}\operatorname{grad}\varphi=\mathbf{e}_\eta&\sqrt{\frac{(\eta^2-b^2)(\eta^2-c^2)}{(\eta^2-\lambda^2)(\eta^2-\theta^2)}}\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\\&+\mathbf{e}_\theta\sqrt{\frac{(\theta^2-b^2)(c^2-\theta^2)}{(\eta^2-\theta^2)(\theta^2-\lambda^2)}}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\\&+\mathbf{e}_\lambda\sqrt{\frac{(b^2-\lambda^2)(c^2-\lambda^2)}{(\eta^2-\lambda^2)(\theta^2-\lambda^2)}}\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda}\end{aligned}\tag{3-150}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{div}\mathbf{E}=&\frac{\sqrt{(\eta^2-b^2)(\eta^2-c^2)}}{(\eta^2-\theta^2)(\eta^2-\lambda^2)}\frac{\partial}{\partial\eta}\\&\cdot\left(\sqrt{(\eta^2-\theta^2)(\eta^2-\lambda^2)}E_\eta\right)\\&+\frac{\sqrt{(\theta^2-b^2)(c^2-\theta^2)}}{(\eta^2-\theta^2)(\theta^2-\lambda^2)}\frac{\partial}{\partial\theta}\\&\cdot\left(\sqrt{(\eta^2-\theta^2)(\theta^2-\lambda^2)}E_\theta\right)\\&+\frac{\sqrt{(b^2-\lambda^2)(c^2-\lambda^2)}}{(\eta^2-\lambda^2)(\theta^2-\lambda^2)}\frac{\partial}{\partial\lambda}\\&\cdot\left(\sqrt{(\eta^2-\lambda^2)(\theta^2-\lambda^2)}E_\lambda\right)\end{aligned}\tag{3-151}$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{E}=\frac{\sqrt{(\eta^2-b^2)(\eta^2-c^2)(\theta^2-b^2)(c^2-\theta^2)(b^2-\lambda^2)(c^2-\lambda^2)}}{(\eta^2-\theta^2)(\eta^2-\lambda^2)(\theta^2-\lambda^2)}$$

$$\cdot\begin{vmatrix}\sqrt{\frac{(\eta^2-\lambda^2)(\eta^2-\theta^2)}{(\eta^2-b^2)(\eta^2-c^2)}}\mathbf{e}_\eta & \sqrt{\frac{(\eta^2-\theta^2)(\theta^2-\lambda^2)}{(\theta^2-b^2)(c^2-\theta^2)}}\mathbf{e}_\theta & \sqrt{\frac{(\eta^2-\lambda^2)(\theta^2-\lambda^2)}{(b^2-\lambda^2)(c^2-\lambda^2)}}\mathbf{e}_\lambda\\ \frac{\partial}{\partial\eta} & \frac{\partial}{\partial\theta} & \frac{\partial}{\partial\lambda}\\ \sqrt{\frac{(\eta^2-\lambda^2)(\eta^2-\theta^2)}{(\eta^2-b^2)(\eta^2-c^2)}}E_\eta & \sqrt{\frac{(\eta^2-\theta^2)(\theta^2-\lambda^2)}{(\theta^2-b^2)(c^2-\theta^2)}}E_\theta & \sqrt{\frac{(\eta^2-\lambda^2)(\theta^2-\lambda^2)}{(b^2-\lambda^2)(c^2-\lambda^2)}}\mathbf{e}_\lambda\end{vmatrix}\tag{3-152}$$

（12）抛物面坐标系

$$u=\mu,\quad v=\nu,\quad w=\lambda$$

$$L_u=\sqrt{\frac{(\mu-\nu)(\mu-\lambda)}{(\mu-b)(\mu-c)}},\quad L_v=\sqrt{\frac{(\mu-\nu)(\lambda-\nu)}{(b-\nu)(c-\nu)}},$$

$$L_w=\sqrt{\frac{(\lambda-\nu)(\mu-\lambda)}{(b-\lambda)(\lambda-c)}}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{grad}\varphi=\ &\mathbf{e}_\mu\sqrt{\frac{(\mu-b)(\mu-c)}{(\mu-\nu)(\mu-\lambda)}}\frac{\partial\varphi}{\partial\mu}\\ &+\mathbf{e}_\nu\sqrt{\frac{(b-\nu)(c-\nu)}{(\mu-\nu)(\lambda-\nu)}}\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\\ &+\mathbf{e}_\lambda\sqrt{\frac{(b-\lambda)(\lambda-c)}{(\lambda-\nu)(\mu-c)}}\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda}\end{aligned}\tag{3-153}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{div}\,\mathbf{E}=\ &\frac{\sqrt{(\mu-b)(\mu-c)}}{(\mu-\nu)(\mu-\lambda)}\frac{\partial}{\partial\mu}\\ &\cdot\left(\sqrt{(\mu-\lambda)(\mu-\nu)}\,E_\mu\right)\\ &+\frac{\sqrt{(b-\nu)(c-\nu)}}{(\mu-\nu)(\lambda-\nu)}\frac{\partial}{\partial\nu}\\ &\cdot\left(\sqrt{(\mu-\nu)(\lambda-\nu)}\,E_\nu\right)\\ &+\frac{\sqrt{(b-\lambda)(\lambda-c)}}{(\mu-\lambda)(\lambda-\nu)}\frac{\partial}{\partial\lambda}\\ &\cdot\left(\sqrt{(\mu-\lambda)(\lambda-\nu)}\,E_\lambda\right)\end{aligned}\tag{3-154}$$

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{E}=\frac{\sqrt{(\mu-b)(\mu-c)(b-\nu)(c-\nu)(b-\lambda)(\lambda-c)}}{(\mu-\nu)(\mu-\lambda)(\lambda-\nu)}$$

$$
\cdot \begin{vmatrix}
\sqrt{\frac{(\mu-\nu)(\mu-\lambda)}{(\mu-b)(\mu-c)}}\mathbf{e}_\mu & \sqrt{\frac{(\mu-\nu)(\lambda-\nu)}{(b-\nu)(c-\nu)}}\mathbf{e}_\nu & \sqrt{\frac{(\lambda-\nu)(\mu-\lambda)}{(b-\lambda)(\lambda-c)}}\mathbf{e}_\lambda \\
\frac{\partial}{\partial\mu} & \frac{\partial}{\partial\nu} & \frac{\partial}{\partial\lambda} \\
\sqrt{\frac{(\mu-\nu)(\mu-\lambda)}{(\mu-b)(\mu-c)}}E_\mu & \sqrt{\frac{(\mu-\nu)(\lambda-\nu)}{(b-\nu)(c-\nu)}}E_\nu & \sqrt{\frac{(\lambda-\nu)(\mu-\lambda)}{(b-\lambda)(\lambda-c)}}E_\lambda
\end{vmatrix} \tag{3-155}
$$

(13) 环面坐标系

$$
L_u = \frac{1}{\operatorname{ch} u - \cos w}, \quad L_v = \frac{\operatorname{sh} u}{\operatorname{ch} u - \cos w},
$$

$$
L_w = \frac{1}{\operatorname{ch} u - \cos w}
$$

代入式(3-117)至(3-119),得

$$
\begin{aligned}
\operatorname{grad} \varphi &= \mathbf{e}_u (\operatorname{ch} u - \cos w) \frac{\partial \varphi}{\partial u} + \mathbf{e}_v \frac{(\operatorname{ch} u - \cos w)}{\operatorname{sh} u} \frac{\partial \varphi}{\partial v} \\
&\quad + \mathbf{e}_w (\operatorname{ch} u - \cos w) \frac{\partial \varphi}{\partial w} \\
&= (\operatorname{ch} u - \cos w) \left(\mathbf{e}_u \frac{\partial \varphi}{\partial u} + \frac{\mathbf{e}_v}{\operatorname{sh} u} \frac{\partial \varphi}{\partial v} + \mathbf{e}_w \frac{\partial \varphi}{\partial w} \right)
\end{aligned} \tag{3-156}
$$

$$
\begin{aligned}
\operatorname{div} \mathbf{E} &= \frac{(\operatorname{ch} u - \cos w)^3}{\operatorname{sh} u} \\
&\quad \cdot \left\{ \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\operatorname{sh} u}{(\operatorname{ch} u - \cos w)^2} E_u \right) \right. \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{E_v}{(\operatorname{ch} u - \cos w)^2} \right) \\
&\quad \left. + \frac{\partial}{\partial w} \left(\frac{\operatorname{sh} u}{(\operatorname{ch} u - \cos w)^2} E_w \right) \right\}
\end{aligned} \tag{3-157}
$$

$$\text{rot}\,\mathbf{E} = \frac{(\text{ch}u - \cos w)^3}{\text{sh}u}$$

$$\cdot \begin{vmatrix} \dfrac{\mathbf{e}_u}{\text{ch}u - \cos w} & \dfrac{\mathbf{e}_v \text{sh}u}{\text{ch}u - \cos w} & \dfrac{\mathbf{e}_w}{\text{ch}u - \cos w} \\ \dfrac{\partial}{\partial u} & \dfrac{\partial}{\partial v} & \dfrac{\partial}{\partial w} \\ \dfrac{E_u}{\text{ch}u - \cos w} & \dfrac{E_v \text{sh}u}{\text{ch}u - \cos w} & \dfrac{E_w}{\text{ch}u - \cos w} \end{vmatrix} \quad (3\text{-}158)$$

(14) 双极坐标系

$$L_u = \frac{1}{\text{ch}w - \cos u}, \quad L_v = \frac{\sin u}{\text{ch}w - \cos u},$$

$$L_w = \frac{1}{\text{ch}w - \cos u}$$

代入式(3-117)至(3-119),得

$$\text{grad}\varphi = (\text{ch}w - \cos u)\left[\mathbf{e}_u \frac{\partial\varphi}{\partial u} + \frac{\mathbf{e}_v}{\sin u}\frac{\partial\varphi}{\partial v} + \mathbf{e}_w \frac{\partial\varphi}{\partial w}\right] \quad (3\text{-}159)$$

$$\begin{aligned} \text{div}\,\mathbf{E} = \frac{(\text{ch}w - \cos u)^3}{\sin u} & \cdot \left\{\frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{\sin u}{(\text{ch}w - \cos u)^2} E_u\right]\right. \\ & + \frac{\partial}{\partial v}\left[\frac{1}{(\text{ch}w - \cos u)^2} E_v\right] \\ & \left. + \frac{\partial}{\partial w}\left[\frac{\sin u}{(\text{ch}w - \cos u)^2} E_w\right]\right\} \end{aligned} \quad (3\text{-}160)$$

$$\text{rot}\,\mathbf{E} = \frac{(\text{ch}w - \cos u)^3}{\sin u}$$

$$
\cdot\begin{vmatrix}
\dfrac{\mathbf{e}_u}{\mathrm{ch}w-\cos u} & \dfrac{\mathbf{e}_v\sin u}{\mathrm{ch}w-\cos u} & \dfrac{\mathbf{e}_w}{\mathrm{ch}w-\cos u}\\
\dfrac{\partial}{\partial u} & \dfrac{\partial}{\partial v} & \dfrac{\partial}{\partial w}\\
\dfrac{E_u}{\mathrm{ch}w-\cos u} & \dfrac{E_v\sin u}{\mathrm{ch}w-\cos u} & \dfrac{E_w}{\mathrm{ch}w-\cos u}
\end{vmatrix}
$$

$$
=\frac{(\mathrm{ch}w-\cos u)^2}{\sin u}
\cdot\begin{vmatrix}
\mathbf{e}_u & \mathbf{e}_v\sin u & \mathbf{e}_w\\
\dfrac{\partial}{\partial u} & \dfrac{\partial}{\partial v} & \dfrac{\partial}{\partial w}\\
\dfrac{E_u}{\mathrm{ch}w-\cos u} & \dfrac{E_v\sin u}{\mathrm{ch}w-\cos u} & \dfrac{E_w}{\mathrm{ch}w-\cos u}
\end{vmatrix}
\tag{3-161}
$$

3-6 平面上的几种常用正交曲线坐标系

为了便于读者参考起见，下面简略地讨论一下平面上的正交曲线坐标系问题。由于证明方法和空间情况完全一样，下面只列出基本定义和结果。证明过程读者可以参考空间情况自己完成。

和空间的情况一样，如果能给出一组一一对应的规则，使我们可以根据平面上的直角坐标 x，y 利用这些规则求出一组唯一的 u,v 这两个数来，反之，利用同样的规则，由 u,v 也可以唯一地求出原先的 x,y 来；具体地说，也就是若能给出下列一组函数关系：

$$
u=f(x,y),\quad v=g(x,y) \tag{3-162}
$$

使我们能根据 x，y 确定 u，v，反之，我们也能根据给定的 u,v 从这个方程组解出唯一的一组 x,y 来，即

$$
x=\varphi(u,v),\quad y=\phi(u,v), \tag{3-163}
$$

当然这些解应满足方程(3-162)，即

$$
\begin{aligned}
u&=f(\varphi(u,v),\phi(u,v))\\
v&=g(\varphi(u,v),\phi(u,v))
\end{aligned}
$$

那末 u, v 这两个数也可以用来确定 P 点的位置 $(P = P(x, y))$；因为知道了 u,v 之后，由式(3-163)即可求出 x,y，于是就确定了 P 点的位置．反之，已知 x,y 后，由式(3.162)即可求出与之对应的 u,v 来．

由此可见，只要给定了函数组 f,g 或 φ, ψ，那么，从确定 P 点位置的观点来看，u,v 和 x,y 是同样有效的，因为 u,v 和 x,y 一一对应，知其一必可算出其二，反之亦然，因此 u,v 也可以看成是 P 点的坐标．为了和直角坐标相区别，称 u,v 为 P 点的曲线坐标．

所谓给出 P 点的曲线坐标，实际上就是给出函数(3-162)或(3-163)．两组函数只要给出其中的一组就够了，因为另一组可以通过解方程的方法求出来．

从使用方便的角度来看，通常人们给出的是方程组(3-163)，即将 x,y 通过 u,v 表示．当然，这丝毫也不妨碍人们去给出或求出方程(3-162)．

对函数 f,g 或 φ,ψ 的限制为要求 x,y 和 u,v 必须一一对应，也就是说 f,g 的反函数 φ,ψ 要是单值的．另外，f, g, φ,ψ 应为连续和具有连续导数的函数．

在方程组

$$\begin{cases} x = \varphi(u,v) \\ y = \psi(u,v) \end{cases}$$

中，若固定 u,v 中的一个，例如固定 v 的数值，而另外的自变量 u 则任其变化，此时，相应的 x,y 在平面上的轨迹称为对应于 u 的坐标线．这根坐标线，一般来说，是平面上的一根曲线．因为固定了 v 的值为 v_0 后，我们得

$$\begin{cases} x = \varphi(u,v_0) \\ y = \psi(u,v_0) \end{cases}$$

从第一个方程中解出 u 并代入第二个方程，我们得到

$$y = y(x)$$

这是在平面上的一根曲线．

要注意的是，在对应于 u 的坐标线中，u 是变化的，而 v 是固定不变的。

当两根坐标线相互垂直时，即对应于 u 的坐标线和对应于 v 的坐标线相互垂直时，这样的坐标系就称为正交曲线坐标系。

曲线坐标系为正交曲线坐标系的条件是：

$$\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}=0 \tag{3-164}$$

注意，这里 x,y 表示为 u,v 的函数。

现在引入度量系数的概念。

定义 度量系数 l_u,l_v 定义为下列两个量：

$$l_u=\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2},\quad l_v=\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2}$$

令在空间中有两个点 P_1 和 P_2。P_1 的直角坐标是 x,y，相应的曲线坐标是 u,v。P_2 的直角坐标是 $x+dx,y+dy$，相应的曲线坐标是 $u+du$，$v+dv$。P_1 和 P_2 之间的距离，即用一定的长度单位来度量线段 P_1P_2 后所得到的数，在直角坐标系中，可用下列公式表示：

$$ds=\sqrt{dx^2+dy^2} \tag{3-165}$$

和空间的情况一样，根据给定的 x,y 和 u,v 的关系，以及曲线坐标系为正交坐标系的条件，可以推导出在数学上与式(3-165)恒等，以 u,v 表示的长度元 ds 的公式如下：

$$ds=\sqrt{l_u^2du^2+l_v^2dv^2} \tag{3-166}$$

而面积元的公式则可表示如下：

$$dS=l_ul_vdudv \tag{3-167}$$

下面列举几种平面上常用的正交曲线坐标系供读者参考。

(1) 极坐标系

在此坐标系中，

$$\begin{cases}x=u\cos v & 0\leqslant u<\infty,\\ y=u\sin v & 0\leqslant v<2\pi\end{cases} \tag{3-168}$$

坐标线：

当 $u=u_0=$ 常数时，v 坐标线是

$$x=u_0\cos v$$
$$y=u_0\sin v$$

或

$$x^2+y^2=u_0^2$$

这是一个中心在(0,0)上、半径为 u_0 的圆。

当 $v=v_0=$ 常数时，u 坐标线是

$$x=u\cos v_0$$
$$y=u\sin v_0$$

或

$$y=(\operatorname{tg} v_0)x$$

这是一条半直线。所有这些坐标线都画在图 3-15 中。

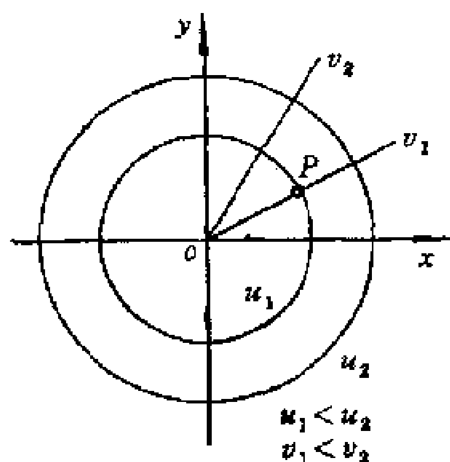


图 3-15 极坐标系

正交性：

$$\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}$$
$$=-\cos v\cdot u\sin v+\sin v\cdot u\cos v=0$$

故极坐标系为正交坐标系。

度量系数：

$$l_u=\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2}$$
$$=\sqrt{\cos^2 v+\sin^2 v}=1 \tag{3-169}$$

$$l_v=\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2}=\sqrt{v^2\sin^2 v+u^2\cos^2 v}$$
$$=\sqrt{u^2}=u \tag{3-170}$$

(2) 抛物线坐标系

在此坐标系中，

$$\begin{cases}x=u^2-v^2 & -\infty<u<\infty\\ y=2uv & 0\leqslant v<\infty\end{cases} \tag{3-171}$$

坐标线：

当　$u=u_0=$ 常数时，v 坐标线是

$$\begin{cases}x=u_0^2-v^2\\ y=2u_0v\end{cases}$$

或

$$x=u_0^2-\frac{y^2}{4u_0^2}$$

这是一根抛物线。

当　$v=v_0=$ 常数时，u 坐标线是

$$\begin{cases}x=u^2-v_0^2\\ y=2uv_0\end{cases}$$

或

$$x=\frac{y^2}{4v_0^2}-v_0^2$$

$$y^2=4v_0^2(x+v_0^2)$$

这是朝相反方向开口的抛物线。所有这些坐标线都画于图 3-16 中。图中 u_1,u_2,v_1,v_2 表示固定的 u,v 值。

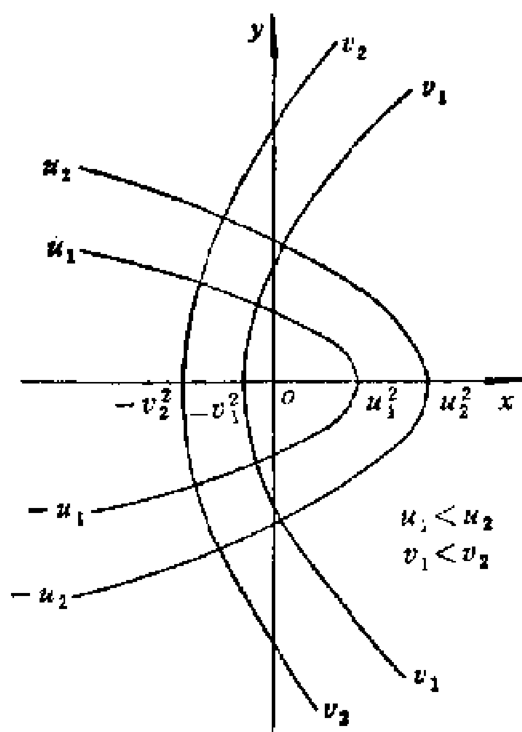


图 3-16　抛物线坐标系

正交性：

$$\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}$$

$$=-4uv+4uv=0$$

故抛物线坐标系为正交曲线坐标系。

度量系数：

$$l_u=\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2}$$

$$=2\sqrt{u^2+v^2}\qquad(3\text{-}172)$$

$$l_v=\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2}$$

$$= 2\sqrt{u^2 + v^2} \tag{3-173}$$

(3) 双极坐标系

在此坐标系中，

$$\begin{cases} x = \dfrac{\operatorname{sh} u}{\operatorname{ch} u + \cos v} & -\infty < u < +\infty, \\ y = \dfrac{\sin v}{\operatorname{ch} u + \cos v} & 0 \leqslant v < 2\pi \end{cases} \tag{3-174}$$

坐标线：

当 $u = u_0 =$ 常数$\neq 0$ 时，v 坐标线是

$$(x - \operatorname{cth} u_0)^2 + y^2 = \frac{1}{\operatorname{sh}^2 u_0}$$

这是一个圆心在 $(\operatorname{cth} u_0, 0)$ 上、半径为 $\dfrac{1}{|\operatorname{sh} u_0|}$ 的圆。

证明如下：

因

$$x = \frac{\operatorname{sh} u_0}{\operatorname{ch} u_0 + \cos v}, \quad y = \frac{\sin v}{\operatorname{ch} u_0 + \cos v}$$

故

$$\frac{y \operatorname{sh} u_0}{x} = \sin v$$

另外

$$\cos v \cdot x + \operatorname{ch} u_0 x = \operatorname{sh} u_0$$

或

$$\cos v = \frac{\operatorname{sh} u_0}{x} - \operatorname{ch} u_0$$

利用

$$\sin^2 v + \cos^2 v = 1$$

得

$$\frac{y^2}{x^2} \operatorname{sh}^2 u_0 + \left(\frac{\operatorname{sh} u_0}{x} - \operatorname{ch} u_0\right)^2 = 1$$

化简后即得

$$y^2 + (x - \operatorname{cth} u_0)^2 = \frac{1}{\operatorname{sh}^2 u_0}$$

$v = v_0 =$ 常数 $\neq 0$ 时，u 坐标线是

$$x^2 + (y + \operatorname{ctg} v_0)^2 = \frac{1}{\sin^2 v_0}$$

这是一个圆心在 $(o, -\operatorname{ctg} v_0)$ 上、半径为 $\left|\frac{1}{\sin v_0}\right|$ 的圆。证明方法同上。所有这些坐标线都画在图 3-17 中。

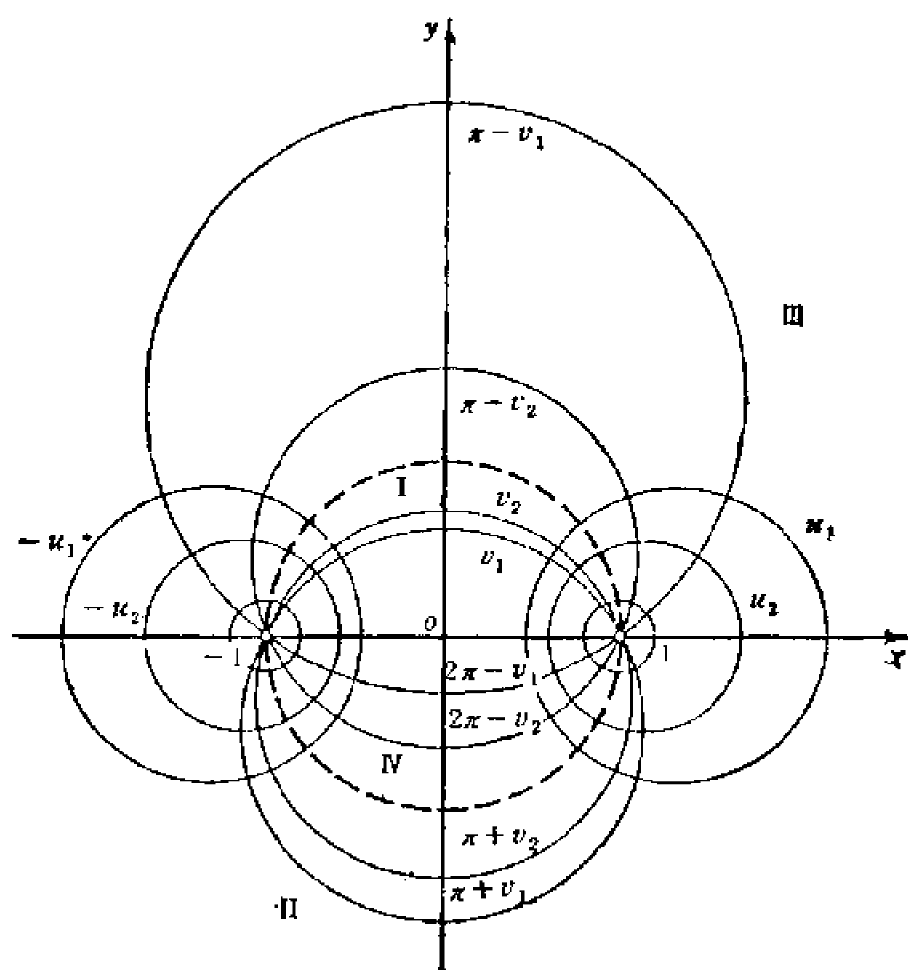


图 3-17　双极坐标系

正交性：

$$\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}$$

$$= \frac{(1+\operatorname{ch} u \cos v)\operatorname{sh} u \sin v - (1+\operatorname{ch} u \cos v)\operatorname{sh} u \sin v}{(\operatorname{ch} u + \cos v)^2}$$

$$= 0$$

故双极坐标系为正交曲线坐标系。

度量系数：

$$l_u = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{(1+\operatorname{ch} u \cos v)^2 + \operatorname{sh}^2 u \sin^2 v}{(\operatorname{ch} u + \cos v)^4}}$$

$$= \frac{1}{\operatorname{ch} u + \cos v} \tag{3-175}$$

同理

$$l_v = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{(1+\operatorname{ch} u \cos v)^2 + \operatorname{sh}^2 u \sin^2 v}{(\operatorname{ch} u + \cos v)^4}}$$

$$= \frac{1}{\operatorname{ch} u + \cos v} \tag{3-176}$$

（4）椭圆坐标系

在此坐标系中，

$$\begin{cases} x = \operatorname{ch} u \cos v \\ y = \operatorname{sh} u \sin v \end{cases} \tag{3-177}$$

且

$$0 \leqslant u < \infty, \quad 0 \leqslant v < 2\pi$$

坐标线：

当 $u = u_0 =$ 常数时，v 坐标线为

$$\frac{x^2}{\operatorname{ch}^2 u_0} + \frac{y^2}{\operatorname{sh}^2 u_0} = 1$$

这是中心在(0,0)上、焦点为(±1,0)的椭圆。

当 $v = v_0 =$ 常数时，u 坐标线为

$$\frac{x^2}{\cos^2 v_0} - \frac{y^2}{\sin^2 v_0} = \text{ch}^2 u - \text{sh}^2 u = 1$$

这是中心在(0,0)上、焦点为(±1,0)的双曲线。椭圆的长轴是 $\text{ch}u_0$，短轴是 $\text{sh}u_0$。双曲线的实轴是 $\cos v_0$，虚轴是 $\sin v_0$。所有这些坐标线都画在图 3-18 上。

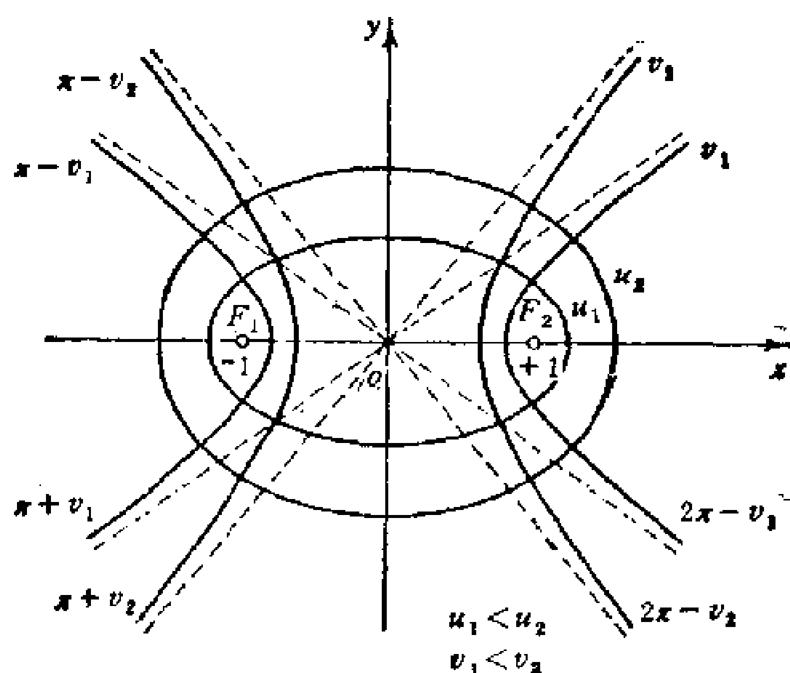


图 3-18 椭圆坐标系

正交性：

$$\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}$$

$$= -\text{sh}u\cos v \cdot \text{ch}u\sin v + \text{ch}u\sin v\,\text{sh}u\cos v$$

$$= 0$$

故椭圆坐标系为正交曲线坐标系。

度量系数：

$$l_u = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\text{sh}^2 u\cos^2 v + \text{ch}^2 u\sin^2 v}$$

$$= \sqrt{\text{ch}^2 u - \cos^2 v} \tag{3-178}$$

$$
\begin{aligned}
l_v &= \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2} \\
&= \sqrt{\mathrm{ch}^2 u \sin^2 v + \mathrm{sh}^2 u \cos^2 v} \\
&= \sqrt{\mathrm{ch}^2 u - \cos^2 v}
\end{aligned}
\tag{3-179}
$$

(5) 一般椭圆坐标系

在此坐标系中，

$$
\begin{cases}
x^2 = \dfrac{(u + a^2)(v + a^2)}{a^2 - b^2} \\
y^2 = \dfrac{(u + b^2)(v + b^2)}{b^2 - a^2}
\end{cases}
\tag{3-180}
$$

且

$$
0 \leqslant b^2 < a^2
$$

$$
-a^2 < v < -b^2 < u < \infty
$$

坐标线：

$u = u_0 =$ 常数 $(-b^2 < u_0 < \infty)$ 时，v 坐标线为

$$
\frac{x^2}{u_0 + a^2} + \frac{y^2}{u_0 + b^2} = \frac{v + a^2}{a^2 - b^2} + \frac{v + b^2}{b^2 - a^2} = 1
$$

这是中心在(0,0)上、焦点为 $(\pm\sqrt{a^2 - b^2}, 0)$ 的椭圆

$$
(\sqrt{u_0 + a^2 - u_0 - b^2} = \sqrt{a^2 - b^2}).
$$

当 $v = v_0 =$ 常数 $(-a^2 < v_0 < -b^2)$ 时，u 坐标线为

$$
\frac{x^2}{v_0 + a^2} + \frac{y^2}{v_0 + b^2} = \frac{u + a^2}{a^2 - b^2} + \frac{u + b^2}{b^2 - a^2} = 1
$$

或

$$
\frac{x^2}{v_0 + a^2} - \frac{y^2}{-(v_0 + b^2)} = 1
$$

这里

$$
-(v_0 + b^2) > 0
$$

这是中心在原点上、焦点为 $(\pm\sqrt{a^2 - b^2}, 0)$ 的双曲线。

一般椭圆坐标系和椭圆坐标的不同之处在于前者的椭圆坐标线其长短轴可通过 a, b 的选择任意选定，而后者则不能分别任意

选定。这一点对于考虑实际应用问题来说是很重要的。

一般椭圆坐标系的图形如图 3-19 所示。

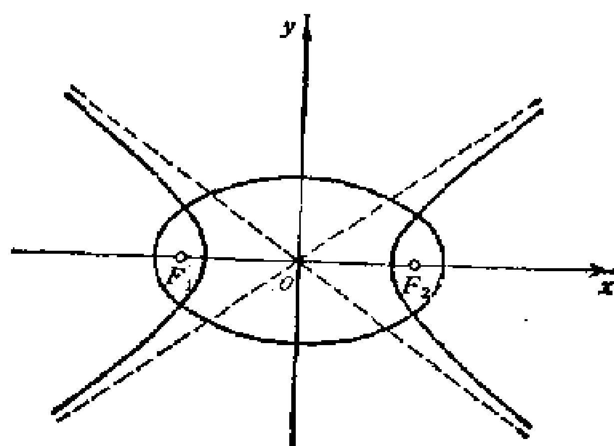


图 3-19　一般椭圆坐标系

正交性：

因对 u 微分后，得

$$2x\frac{\partial x}{\partial u}=\frac{v+a^2}{a^2-b^2}$$

同理，对 v 微分后，得

$$2x\frac{\partial x}{\partial v}=\frac{u+a^2}{a^2-b^2}$$

于是

$$\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}=\frac{1}{4x^2}\frac{(u+a^2)(v+a^2)}{(a^2-b^2)^2}=\frac{1}{4}\frac{1}{a^2-b^2}$$

用同样的方法可以证明：

$$\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}=\frac{1}{4}\frac{1}{b^2-a^2}$$

由此可得

$$\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}=0$$

因此一般椭圆坐标系为正交曲线坐标系。

度量系数：

因

$$4x^2\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2=\frac{(v+a^2)^2}{(a^2-b^2)^2}$$

故

$$\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2=\frac{1}{4x^2}\frac{(v+a^2)^2}{(a^2-b^2)^2}=\frac{1}{4}\frac{v+a^2}{(u+a^2)(a^2-b^2)}$$

同理

$$\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2=\frac{1}{4}\frac{v+b^2}{(u+b^2)(b^2-a^2)}$$

由此可得

$$
\begin{aligned}
l_u &= \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2} \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{v+a^2}{(u+a^2)(a^2-b^2)} + \frac{v+b^2}{(u+b^2)(b^2-a^2)}} \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{u-v}{(u+a^2)(u+b^2)}}
\end{aligned}
$$

令

$$
m(t) = (t+a^2)(t+b^2) \tag{3-181}
$$

则

$$
m(u) = (u+a^2)(u+b^2)
$$

于是

$$
l_u = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{u-v}{m(u)}} \tag{3-182}
$$

用同样的方法可以证明:

$$
\begin{aligned}
l_v &= \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2} \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{u-v}{-(v+a^2)(v+b^2)}} \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{u-v}{-m(v)}}
\end{aligned} \tag{3-183}
$$

此处 $-m(v) > 0$, 因为 $-(v+a^2) < 0$, $v+b^2 < 0$。

现在我们提出这样一个问题,即能否不解方程组 (3-180) 而直接证明对给定的 x,y 只有一对 u,v 满足式(3-180),即 $x=x(u,v),y=y(u,v)$ 的反函数为单值?

为了证明这一点,首先要证明方程组

$$
\begin{cases}
\dfrac{x^2}{u+a^2} + \dfrac{y^2}{u+b^2} = 1 \\[2mm]
\dfrac{x^2}{v+a^2} + \dfrac{y^2}{v+b^2} = 1
\end{cases} \tag{3-184}
$$

即方程

$$\frac{x^2}{P_i + a^2} + \frac{y^2}{P_i + b^2} = 1$$

此处 $i = 1, 2$，$p_1 = u$，$p_2 = v$，与方程组

$$\begin{cases} x^2 = \dfrac{(u + a^2)(v + a^2)}{a^2 - b^2} \\ y^2 = \dfrac{(u + b^2)(v + b^2)}{b^2 - a^2} \end{cases} \tag{3-185}$$

等效，即与原先给定的式（3-180）等效。为此将方程组(3-184)中的两个方程分别乘以 $1/(v + b^2)$ 和 $1/(u + b^2)$，然后相减，以消去 y^2，结果得

$$x^2\left(\frac{1}{(u + a^2)(v + b^2)} - \frac{1}{(v + a^2)(u + b^2)}\right) = \frac{1}{v + b^2} - \frac{1}{u + b^2}$$

即

$$x^2 = \frac{(u + a^2)(v + a^2)}{a^2 - b^2}$$

这与式(3-185)中的第一个方程一样。同理，将式（3-184）中的两个方程分别乘以 $1/(v + a^2)$ 和 $1/(u + a^2)$，然后相减，以消去 x^2，结果得

$$y^2 = \frac{(u + b^2)(v + b^2)}{b^2 - a^2}$$

这与式(3-185)中的第二个方程一样。

有了以上结果，要证明反函数的单值性，只需证明给定 x, y 和未知数为 P 的方程

$$\frac{x^2}{P + a^2} + \frac{y^2}{P + b^2} = 1$$

有两个实数根，且根分别在 u 和 v 的给定范围内，即 $-b^2 < P_1 < \infty$ 和 $-a^2 < P_2 < b^2$ 就行了。证明如下：函数

$$F(P) = \frac{x^2}{P + a^2} + \frac{y^2}{P + b^2} - 1 = \frac{\phi(P)}{(P + a^2)(P + b^2)}$$

在开区间 $(-a^2,-b^2),(-b^2,\infty)$ 中为参数 P 的连续函数，并且当 P 趋于边界点时符号相反。如 $P\to -a^2+0$，则 $F(P)\to +\infty$，因 $\frac{x^2}{P+a^2}\to +\infty$。当 $P\to -b^2-0$ 时，$F(P)\to -\infty$，因 $\frac{y^2}{P+b^2}\to -\infty$。这意味着 $F(P)$ 在区间 $(-a^2,-b^2)$ 内至少有一次等于零，即至少有一个根。

如 $P\to -b^2+0$，则 $F(P)\to +\infty$，如 $P\to +\infty$，则 $F(P)\to -1$，因此在区间 $(-b^2,\infty)$ 内 $F(P)$ 至少有一次等于零。但方程为 P 的二次方程，由此可知，在每个区间内，只有一个根。这正是我们要证明的结果。

(6) 一般椭圆坐标系的另一种表述方式

为了简化数学运算过程或某些表达式的形式，在一般椭圆坐标系中可以引入两个新变量 u_* 和 v_*，并且 u_* 只是 u 的函数，v_* 只是 v 的函数。这时 x 和 y 可以通过 u_* 和 v_* 表示，而且表示式的形式比较简单。下面就具体地来完成这一变量的变换过程。

首先定义新变量 u_* 和 v_* 为：

$$u_*=\int_{-b^2}^{u}\frac{dt}{\sqrt{4m(t)}},\quad v_*=\int_{-b^2}^{v}\frac{dt}{\sqrt{-4m(t)}}\tag{3-186}$$

在 u_* 的表达式中 $u>-b^2$，而在 v_* 的表达式中 $-a^2<v<-b^2$。积分式中的

$$m(t)=(t+a^2)(t+b^2)$$

在式(3-186)中将 u_* 对 u 微分，v_* 对 v 微分，得

$$du_*=\frac{du}{\sqrt{4\,m(u)}},\quad dv_*=\frac{dv}{\sqrt{-4\,m(v)}}\tag{3-187}$$

现将积分式算出，以求出 u_*,v_* 与 u,v 之间的直接表达式。

令

$$\frac{t+b^2}{t+a^2}=\tau^2\tag{3-188}$$

则

$$t = \frac{a^2\tau^2 - b^2}{(1 - \tau^2)} \tag{3-189}$$

$$dt = \frac{2\tau(a^2 - b^2)}{(1 - \tau^2)^2} d\tau$$

$m(t)$ 通过 τ 的表达式为

$$\begin{aligned} m(t) &= (t + a^2)(t + b^2) \\ &= \left(\frac{a^2\tau^2 - b^2}{1 - \tau^2} + a^2\right)\left(\frac{a^2\tau^2 - b^2}{1 - \tau^2} + b^2\right) \\ &= \frac{\tau^2(a^2 - b^2)^2}{(1 - \tau^2)^2} \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned} \frac{dt}{\sqrt{4m(t)}} &= \frac{2\tau(a^2 - b^2)}{(1 - \tau^2)^2} \cdot \frac{(1 - \tau^2)}{2\tau(a^2 - b^2)} d\tau \\ &= \frac{d\tau}{1 - \tau^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1 + \tau} + \frac{1}{1 - \tau}\right) d\tau \end{aligned}$$

由式(3-189)可见，$t = b^2$ 时，$\tau = 0$； $t = u$ 时，$\tau = \sqrt{\dfrac{u + b^2}{u + a^2}}$

于是

$$\begin{aligned} u_* &= \frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{\frac{u+b^2}{u+a^2}}} \frac{d\tau}{1 + \tau} - \frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{\frac{u+b^2}{u+a^2}}} \frac{d\tau}{1 - \tau} \\ &= \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \sqrt{\dfrac{u + b^2}{u + a^2}}}{1 - \sqrt{\dfrac{u + b^2}{u + a^2}}} \end{aligned}$$

这就是 u_* 通过 u 表示的显式.

下面用同样的方法来求 v_* 的表达式．引入新变量 τ'，

$$\frac{t + a^2}{t + b^2} = -\tau'^2 \quad (-a^2 < t < -b^2) \tag{3-190}$$

则

$$t = -\frac{a^2 + \tau'^2 b^2}{1 + \tau'^2}$$

$$dt = \frac{2\tau'(a^2 - b^2)}{(1 + \tau'^2)^2} d\tau'$$

$$-4m(t) = -4(t + b^2)(t + a^2)$$

$$= 4\frac{\tau'^2(a^2 - b^2)^2}{(1 + \tau'^2)^2}$$

于是

$$\frac{dt}{\sqrt{-4m(t)}} = \frac{d\tau'}{1 + \tau'^2}$$

由式(3-190)可见，

$t = -b^2 - 0$ 时，$\tau' = +\infty$；$t = v$ 时，

$$\tau' = \sqrt{-\frac{v + a^2}{v + b^2}}$$

于是

$$v_* = -\int_v^{-b^2} \frac{dt}{\sqrt{-4m(t)}}$$

$$= -\int_{\sqrt{-\frac{v+a^2}{v+b^2}}}^{+\infty} \frac{d\tau'}{1 + \tau'^2}$$

$$= -\int_{\sqrt{-\frac{v+a^2}{v+b^2}}}^{+\infty} \operatorname{arctg} \tau'$$

$$= -\left[\operatorname{arctg}(+\infty) - \operatorname{arctg}\sqrt{-\frac{v + a^2}{v + b^2}}\right]$$

$$= -\left[\pi/2 - \operatorname{arctg}\sqrt{-\frac{v + a^2}{v + b^2}}\right]$$

$$= -\operatorname{arcctg}\sqrt{-\frac{v + a^2}{v + b^2}}$$

$$(\operatorname{arctg} x = \pi/2 - \operatorname{arcctg} x)$$

这就是 v_* 通过 v 表示的显式。

现将 u_*, v_* 的表达式逆转，求出通过 u_*, v_* 所表示的 u, v 的表达式。

由

$$2u_* = \ln \frac{1 + \sqrt{\dfrac{u+b^2}{u+a^2}}}{1 - \sqrt{\dfrac{u+b^2}{u+a^2}}}$$

得

$$e^{2u_*} = \frac{1 + \sqrt{\dfrac{u+b^2}{u+a^2}}}{1 - \sqrt{\dfrac{u+b^2}{u+a^2}}}$$

由此求出

$$\sqrt{\frac{u+b^2}{u+a^2}} = \frac{e^{2u_*}-1}{e^{2u_*}+1} = \frac{\mathrm{sh}\,u_*}{\mathrm{ch}\,u_*} = \mathrm{th}\,u_*$$

平方后得

$$u + b^2 = u\,\mathrm{th}^2 u_* + a^2 \mathrm{th}^2 u_*$$

$$u(1 - \mathrm{th}^2 u_*) = a^2 \mathrm{th}^2 u_* - b^2$$

$$\frac{u}{\mathrm{ch}^2 u_*} = a^2 \frac{\mathrm{sh}^2 u_*}{\mathrm{ch}^2 u_*} - b^2$$

即

$$\begin{aligned} u &= a^2 \mathrm{sh}^2 u_* - b^2 \mathrm{ch}^2 u_* \\ &= (a^2 - b^2)\mathrm{sh}^2 u_* - b^2 \end{aligned} \qquad (3\text{-}191)$$

这就是 u 通过 u_* 表示的表达式。

用同样的方法，由

$$-v_* = \operatorname{arc\,ctg} \sqrt{-\frac{v+a^2}{v+b^2}}$$

得

$$\mathrm{ctg}\,(-v_*) = \sqrt{-\frac{v+a^2}{v+b^2}}$$

$$\mathrm{ctg}^2 v_* = -\frac{v + a^2}{v + b^2}$$

或

$$v = -(a^2 - b^2)\sin^2 v_* - b^2 \tag{3-192}$$

这就是 v 通过 v_* 表示的表达式。

有了式(3-191)和式(3-192)后，我们就可写出通过 u_* 和 v_* 所表示的 x, y 的表达式。

首先

$$\begin{aligned} x^2 &= \frac{(u + a^2)(v + a^2)}{a^2 - b^2} \\ &= \frac{[(a^2 - b^2)\mathrm{sh}^2 u_* + a^2 - b^2][-(a^2 - b^2)\sin^2 v_* + a^2 - b^2]}{a^2 - b^2} \\ &= (a^2 - b^2)(\mathrm{sh}^2 u_* + 1)(1 - \sin^2 v_*) \\ &= (a^2 - b^2)\mathrm{ch}^2 u_* \cos^2 v_* \end{aligned}$$

其次

$$\begin{aligned} y^2 &= \frac{(u + b^2)(v + b^2)}{b^2 - a^2} \\ &= \frac{(a^2 - b^2)\mathrm{sh}^2 u_* [-(a^2 - b^2)\sin^2 v_*]}{b^2 - a^2} \\ &= (a^2 - b^2)\mathrm{sh}^2 u_* \sin^2 v_* \end{aligned}$$

或

$$\begin{cases} x = \sqrt{a^2 - b^2}\,\mathrm{ch} u_* \cos v_* \\ y = \sqrt{a^2 - b^2}\,\mathrm{sh} u_* \sin v_* \end{cases} \tag{3-193}$$

3-7 单位矢量变换的梯度法

由第二章我们知道，grad$f$, div$\mathbf{f}$, rot$\mathbf{f}$ 等场函数是由场的性质决定的函数，与所选用的坐标系统无关。这可由它们的积分表达式(2-41),(2-46)和(2-59)看出。

以 grad$f$ 为例，令 P 表示场点，$f(P)$ 表示场函数，取 (u_1,

u_2, u_3）为一个正交曲线坐标系和（v_1, v_2, v_3）为另一个曲线坐标系。这时 $f(P)$ 可以写成

$$f(P)=f(u_1,u_2,u_3)=f(v_1,v_2,v_3)$$

式中，(u_1,u_2,u_3) 和 (v_1,v_2,v_3) 为对应于同一点 P 的曲线坐标。

我们有

$$\begin{aligned}\operatorname{grad} f(P)&=\operatorname{grad} f(u_1,u_2,u_3)\\&=\frac{1}{L_{u_1}}\frac{\partial f}{\partial u_1}\mathbf{e}_{u_1}+\frac{1}{L_{u_2}}\frac{\partial f}{\partial u_2}\mathbf{e}_{u_2}+\frac{1}{L_{u_3}}\frac{\partial f}{\partial u_3}\mathbf{e}_{u_3}\end{aligned}$$

同时有

$$\begin{aligned}\operatorname{grad} f(P)&=\operatorname{grad} f(v_1,v_2,v_3)\\&=\frac{1}{L_{v_1}}\frac{\partial f}{\partial v_1}\mathbf{e}_{v_1}+\frac{1}{L_{v_2}}\frac{\partial f}{\partial v_2}\mathbf{e}_{v_2}+\frac{1}{L_{v_3}}\frac{\partial f}{\partial v_3}\mathbf{e}_{v_3}\end{aligned}$$

这里 $L_{u_1}, L_{u_2}, L_{u_3}$ 和 $L_{v_1}, L_{v_2}, L_{v_3}$ 分别为坐标线 u_1, u_2, u_3 和 v_1,v_2,v_3 的度量系数。

因为

$$\operatorname{grad} f(u_1,u_2,u_3)=\operatorname{grad} f(P)=\operatorname{grad} f(v_1,v_2,v_3)$$

所以

$$\begin{aligned}&\frac{1}{L_{u_1}}\frac{\partial f}{\partial u_1}\mathbf{e}_{u_1}+\frac{1}{L_{u_2}}\frac{\partial f}{\partial u_2}\mathbf{e}_{u_2}+\frac{1}{L_{u_3}}\frac{\partial f}{\partial u_3}\mathbf{e}_{u_3}\\&=\frac{1}{L_{v_1}}\frac{\partial f}{\partial v_1}\mathbf{e}_{v_1}+\frac{1}{L_{v_2}}\frac{\partial f}{\partial v_2}\mathbf{e}_{v_2}+\frac{1}{L_{v_3}}\frac{\partial f}{\partial v_3}\mathbf{e}_{v_3}\end{aligned}\tag{3-194}$$

和上面的表达式一样，$\mathbf{e}_{u_1},\mathbf{e}_{u_2},\mathbf{e}_{u_3},\mathbf{e}_{v_1},\mathbf{e}_{v_2},\mathbf{e}_{v_3}$ 为沿坐标线 u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3 的单位矢量。

式(3-194)是表示 $\mathbf{e}_{u_1},\mathbf{e}_{u_2},\mathbf{e}_{u_3}$ 和 $\mathbf{e}_{v_1},\mathbf{e}_{v_2},\mathbf{e}_{v_3}$ 之间关系的一个方程。如果适当地选择 $f(u_1,u_2,u_3)$，使 $\frac{\partial f}{\partial u_2}=0$ 和 $\frac{\partial f}{\partial u_3}=0$，我们就能得到一个通过 $\mathbf{e}_{v_1}$, $\mathbf{e}_{v_2}$, $\mathbf{e}_{v_3}$ 表示的 $\mathbf{e}_{u_1}$ 的关系式。用同样的方法，可以通过 $\mathbf{e}_{v_1},\mathbf{e}_{v_2},\mathbf{e}_{v_3}$ 来表示 $\mathbf{e}_{u_2},\mathbf{e}_{u_3}$。换句话说，可以将 $\mathbf{e}_{u_1}$ 等分解成沿 $\mathbf{e}_{v_1},\mathbf{e}_{v_2},\mathbf{e}_{v_3}$ 的分量。反之，用同样的方法，也可以将 $\mathbf{e}_{v_1}$ 等分解成沿 $\mathbf{e}_{u_1},\mathbf{e}_{u_2},\mathbf{e}_{u_3}$ 的分量[1]。

我们举一个具体的例子来加以说明。第一个坐标系取直角坐标系 (x,y,z)。第二个坐标系取球坐标系 (r,θ,ϕ)。我们有

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\phi \\ y = r\sin\theta\sin\phi \\ z = r\cos\theta \end{cases} \qquad \begin{cases} L_r = 1 \\ L_\theta = r \\ L_\phi = r\sin\theta \end{cases}$$

详见 3-2 节。现取

$$f(P) = x = r\sin\theta\cos\phi$$

则

$$\text{grad}\, f(P) = \frac{\partial x}{\partial x}\mathbf{i} = \mathbf{i}$$

及

$$\text{grad} f(P) = 1\,\frac{\partial(r\sin\theta\cos\phi)}{\partial r}\,\mathbf{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial(r\sin\theta\cos\phi)}{\partial\theta}\mathbf{e}_\theta$$
$$+ \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(r\sin\theta\cos\phi)}{\partial\phi}\mathbf{e}_\phi$$
$$= \sin\theta\cos\phi\mathbf{e}_r + \cos\theta\cos\phi\mathbf{e}_\theta - \sin\phi\mathbf{e}_\phi$$

即

$$\mathbf{i} = \sin\theta\cos\phi\mathbf{e}_r + \cos\theta\cos\phi\mathbf{e}_\theta - \sin\phi\mathbf{e}_\phi$$

用同样的方法，取 $f(P) = y$，这时 $y = r\sin\theta\sin\phi$，并取 $f(P)$ 的梯度，得

$$\mathbf{j} = \sin\theta\sin\phi\mathbf{e}_r + \cos\theta\sin\phi\mathbf{e}_\theta + \cos\phi\mathbf{e}_\phi$$

如取 $f(P) = z$，这时 $z = r\cos\theta$，同时分别在两个坐标系中取 $f(P)$ 的梯度，得

$$\mathbf{k} = \cos\theta\mathbf{e}_r - \sin\theta\mathbf{e}_\theta$$

上述结果可以列成下表：

	$\mathbf{i}$	$\mathbf{j}$	$\mathbf{k}$
$\mathbf{e}_r$	$\sin\theta\cos\phi$	$\sin\theta\sin\phi$	$\cos\theta$
$\mathbf{e}_\theta$	$\cos\theta\cos\phi$	$\cos\theta\sin\phi$	$-\sin\theta$
$\mathbf{e}_\phi$	$-\sin\phi$	$\cos\phi$	0

从这个表中立即可以查出：

$$\begin{cases}\mathbf{e}_r = \sin\theta\cos\phi\mathbf{i} + \sin\theta\sin\phi\mathbf{j} + \cos\theta\mathbf{k} \\ \mathbf{e}_\theta = \cos\theta\cos\phi\mathbf{i} + \cos\theta\sin\phi\mathbf{j} - \sin\theta\mathbf{k} \\ \mathbf{e}_\phi = -\sin\phi\mathbf{i} + \cos\phi\mathbf{j}\end{cases} \tag{3-195}$$

所以只要知道 $\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}$ 在 $\mathbf{e}_r,\mathbf{e}_\theta,\mathbf{e}_\phi$ 上的分量，倒过来立即可以得到 $\mathbf{e}_r,\mathbf{e}_\theta,\mathbf{e}_\phi$ 在 $\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}$ 上的分量。

作为第二个例子，取第一个坐标系为极轴指向 z 轴正方向的球坐标系，即

$$\begin{cases}x = r\sin\theta\cos\phi \\ y = r\sin\theta\sin\phi \\ z = r\cos\theta\end{cases}$$

取第二个坐标系为极轴指向 x 轴正方向的球坐标系，极角用 α 表示，而方位角则从 y 轴算起，用 β 表示，即

$$x = r\cos\alpha$$

$$y = r\sin\alpha\cos\beta$$

$$z = r\sin\alpha\sin\beta$$

这两个坐标系的度量系数分别是

$$L_r = 1,\ L_\theta = r,\ L_\phi = r\sin\theta$$

$$L_r = 1,\ L_\alpha = r,\ L_\beta = r\sin\alpha$$

并且

$$x = r\sin\theta\cos\phi = r\cos\alpha$$

$$y = r\sin\theta\sin\phi = r\sin\alpha\cos\beta$$

$$z = r\cos\theta = r\sin\alpha\sin\beta$$

取 $f(P) = \sin\theta\cos\phi = \cos\alpha$，则在第一个坐标系中

$$\begin{aligned}\operatorname{grad} f(P) &= \operatorname{grad}(\sin\theta\cos\phi) \\ &= \frac{1}{r}\frac{\partial(\sin\theta\cos\phi)}{\partial\theta}\mathbf{e}_\theta \\ &\qquad + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(\sin\theta\cos\phi)}{\partial\phi}\mathbf{e}_\phi \\ &= \frac{1}{r}\cos\theta\cos\phi\mathbf{e}_\theta - \frac{1}{r}\sin\phi\mathbf{e}_\phi\end{aligned}$$

在第二个坐标系中，

$$\operatorname{grad} f(P) = \operatorname{grad}(\cos\alpha)$$

$$= \frac{1}{r}\frac{\partial\cos\alpha}{\partial\alpha}\mathbf{e}_\alpha = -\frac{1}{r}\sin\alpha\mathbf{e}_\alpha$$

由此可得

$$-\sin\alpha\mathbf{e}_\alpha = \cos\theta\cos\phi\mathbf{e}_\theta - \sin\phi\mathbf{e}_\phi$$

或

$$\mathbf{e}_\alpha = \frac{-1}{(1-\cos^2\alpha)^{1/2}}(\cos\theta\cos\phi\mathbf{e}_\theta - \sin\phi\mathbf{e}_\phi)$$

$$= \frac{-1}{(1-\sin^2\theta\cos^2\phi)^{1/2}}(\cos\theta\cos\phi\mathbf{e}_\theta - \sin\phi\mathbf{e}_\phi) \quad (3\text{-}196)$$

这是要推导的第一个关系式。

因为

$$\frac{y}{x} = \operatorname{ctg}\beta = \operatorname{tg}\theta\sin\phi$$

取

$$f(P) = \operatorname{ctg}\beta = \operatorname{tg}\theta\sin\phi$$

则有

$$\operatorname{grad} f(P) = \frac{1}{r\sin\alpha}\frac{\partial\operatorname{ctg}\beta}{\partial\beta}\mathbf{e}_\beta$$

$$= \frac{-\csc^2\beta}{r\sin\alpha}\mathbf{e}_\beta = \frac{-\mathbf{e}_\beta}{r\sin\alpha\sin^2\beta}$$

$$= \frac{-\sin\alpha\mathbf{e}_\beta}{r\sin^2\alpha\sin^2\beta} = \frac{-\sin\alpha\mathbf{e}_\beta}{r\cos^2\theta}$$

另一方面，

$$\operatorname{grad} f(P) = \operatorname{grad}\operatorname{tg}\theta\sin\phi$$

$$= \frac{1}{r}\frac{\partial(\operatorname{tg}\theta\sin\phi)}{\partial\theta}\mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(\operatorname{tg}\theta\sin\phi)}{\partial\phi}\mathbf{e}_\phi$$

$$= \frac{\sin\phi}{r\cos^2\theta}\mathbf{e}_\theta + \frac{\operatorname{tg}\theta\cos\phi}{r\sin\theta}\mathbf{e}_\phi$$

$$= \frac{\sin\phi}{r\cos^2\theta}\mathbf{e}_\theta + \frac{\cos\phi}{r\cos\theta}\mathbf{e}_\phi$$

由此可得

$$\frac{-\sin\alpha\mathbf{e}_\beta}{r\cos^2\theta}=\frac{\sin\psi}{r\cos^2\theta}\mathbf{e}_\theta+\frac{\cos\psi}{r\cos\theta}\mathbf{e}_\psi$$

即

$$-\sin\alpha\mathbf{e}_\beta=\sin\psi\mathbf{e}_\theta+\cos\theta\cos\psi\mathbf{e}_\psi$$

或

$$\mathbf{e}_\beta=\frac{-(\sin\psi\mathbf{e}_\theta+\cos\theta\cos\psi\mathbf{e}_\psi)}{\sin\alpha}$$

$$=\frac{-(\sin\psi\mathbf{e}_\theta+\cos\theta\cos\psi\mathbf{e}_\psi)}{(1-\sin^2\theta\cos^2\psi)^{1/2}} \tag{3-197}$$

现将结果列表如下:

	$\mathbf{e}_r$	$\mathbf{e}_\theta$	$\mathbf{e}_\psi$
$\mathbf{e}_r$	1	0	0
$\mathbf{e}_\alpha$	0	$\frac{-\cos\theta\cos\psi}{(1-\sin^2\theta\cos^2\psi)^{1/2}}$	$\frac{\sin\psi}{(1-\sin^2\theta\cos^2\psi)^{1/2}}$
$\mathbf{e}_\beta$	0	$\frac{-\sin\psi}{(1-\sin^2\theta\cos^2\psi)^{1/2}}$	$\frac{-\cos\theta\cos\psi}{(1-\sin^2\theta\cos^2\psi)^{1/2}}$

利用关系式

$$\cos\theta=\sin\alpha\sin\beta$$

和

$$\operatorname{tg}\psi=\operatorname{tg}\alpha\cos\beta\quad(y/x)$$

并分别在两个坐标系中取梯度,可得

$$\mathbf{e}_\theta=\frac{-(\cos\alpha\sin\beta\mathbf{e}_\alpha+\cos\beta\mathbf{e}_\beta)}{(1-\sin^2\alpha\sin^2\beta)^{1/2}}$$

$$\mathbf{e}_\psi=\frac{\cos\beta\mathbf{e}_\alpha-\cos\alpha\sin\beta\mathbf{e}_\beta}{(1-\sin^2\alpha\sin^2\beta)^{1/2}} \tag{3-198}$$

与上表不同之处在于转换系数现在是 α,β 的函数，而不是 θ,ψ 的函数。

下面再举几个应用梯度法的例子，

1. 第一个坐标系取为直角坐标系 (x,y,z)，第二个坐标系取为圆柱坐标系(r,ϕ,z). x,y,z 和 r,ϕ,z 的关系是

$$\begin{cases} x = r\cos\phi & (3\text{-}199) \\ y = r\sin\phi & (3\text{-}200) \\ z = z \end{cases}$$

度量系数

$$L_x = L_y = L_z = 1$$

$$L_r = 1 \quad L_\phi = r \quad L_z = 1$$

分别取 (3-199)和(3-200) 在直角坐标系和圆柱坐标系中的梯度，立即可得

$$\begin{aligned} \mathbf{i} &= \cos\phi\mathbf{e}_r - \sin\phi\mathbf{e}_\phi \\ \mathbf{j} &= \sin\phi\mathbf{e}_r + \cos\phi\mathbf{e}_\phi \\ \mathbf{k} &= \mathbf{k} \end{aligned} \tag{3-201}$$

2. 第一个坐标系取为直角坐标系 (x,y,z)，第二个坐标系取为抛物柱面坐标系 (μ,ν,z). x,y,z 和 μ,ν,z 之间的关系是

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{2}(\mu^2 - \nu^2) \\ y = \mu\nu \\ z = z \end{cases}$$

度量系数:

$$L_\mu = \sqrt{\mu^2 + \nu^2} \quad L_\nu = \sqrt{\mu^2 + \nu^2} \quad L_z = 1$$

先取 $f(P) = x = \dfrac{1}{2}(\mu^2 - \nu^2)$ 并分别在两个坐标系中取梯度，得

$$\mathbf{i} = \frac{1}{\sqrt{\mu^2+\nu^2}}\left(\frac{\partial \frac{1}{2}(\mu^2-\nu^2)}{\partial\mu}\mathbf{e}_\mu + \frac{\partial \frac{1}{2}(\mu^2-\nu^2)}{\partial\nu}\mathbf{e}_\nu\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\mu^2+\nu^2}}(\mu\mathbf{e}_\mu - \nu\mathbf{e}_\nu) \tag{3-202}$$

再取 $f(P) = y = \mu\nu$ 并分别在两个坐标系中取梯度，得

$$\mathbf{j} = \frac{1}{\sqrt{\mu^2+\nu^2}}\left(\frac{\partial(\mu\nu)}{\partial\mu}\mathbf{e}_\mu + \frac{\partial(\mu\nu)}{\partial\nu}\mathbf{e}_\nu\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\mu^2 + \nu^2}} (\nu \mathbf{e}_\mu + \mu \mathbf{e}_\nu) \qquad (3\text{-}203)$$

列表如下:

	$\mathbf{i}$	$\mathbf{j}$	$\mathbf{k}$
$\mathbf{e}_\mu$	$\frac{\mu}{\sqrt{\mu^2+\nu^2}}$	$\frac{\nu}{\sqrt{\mu^2+\nu^2}}$	0
$\mathbf{e}_\nu$	$\frac{-\nu}{\sqrt{\mu^2+\nu^2}}$	$\frac{\mu}{\sqrt{\mu^2+\nu^2}}$	0
$\mathbf{k}$	0	0	1

3. 第一个坐标系取为直角坐标系 (x,y,z)，第二个坐标系取为双极柱面坐标系 (u,v,z)（见 3-6 节）. x,y,z 和 u,v,z 之间的关系是

$$x = \frac{\operatorname{sh} u}{\operatorname{ch} u + \cos v}, \quad y = \frac{\sin v}{\operatorname{ch} u + \cos v}, \quad z = z$$

度量系数:

$$L_u = \frac{1}{\operatorname{ch} u + \cos v}, \quad L_v = \frac{1}{\operatorname{ch} u + \cos v}, \quad L_z = 1$$

先取 $f(P) = x = \dfrac{\operatorname{sh} u}{\operatorname{ch} u + \cos v}$,并分别在两个坐标系中取梯度,得

$$\mathbf{i} = (\operatorname{ch} u + \cos v) \left[\frac{\partial \left(\dfrac{\operatorname{sh} u}{\operatorname{ch} u + \cos v} \right)}{\partial u} \mathbf{e}_u + \frac{\partial \left(\dfrac{\operatorname{sh} u}{\operatorname{ch} u + \cos v} \right)}{\partial v} \mathbf{e}_v \right]$$

$$= \frac{(\operatorname{ch} u + \cos v)}{(\operatorname{ch} u + \cos v)^2} [(\operatorname{ch} u (\operatorname{ch} u + \cos v) - \operatorname{sh}^2 u) \mathbf{e}_u + \operatorname{sh} u \sin v \mathbf{e}_v]$$

$$= \frac{1}{\operatorname{ch} u + \cos v} [(\operatorname{ch}^2 u - \operatorname{sh}^2 u + \operatorname{ch} u \cos v) \mathbf{e}_u + \operatorname{sh} u \sin v \mathbf{e}_v]$$

$$= \frac{1}{\operatorname{ch} u + \cos v} [(1 + \operatorname{ch} u \cos v) \mathbf{e}_u + \operatorname{sh} u \sin v \mathbf{e}_v] \qquad (3\text{-}204)$$

再取 $f(P) = y = \dfrac{\sin v}{\mathrm{ch}\,u + \cos v}$,并分别在两个坐标系中取梯度,得

$$\mathbf{j} = \frac{1}{\mathrm{ch}\,u + \cos v}\left[\sin v\,\mathrm{sh}\,u\,\mathbf{e}_u + (\cos v(\mathrm{ch}\,u + \cos v) + \sin^2 v)\mathbf{e}_v\right]$$

$$= \frac{1}{\mathrm{ch}\,u + \cos v}\left[\sin v\,\mathrm{sh}\,u\,\mathbf{e}_u + (1 + \cos v\,\mathrm{ch}\,u)\mathbf{e}_v\right] \qquad (3\text{-}205)$$

第四章　矢量分析中的符号运算法

4-1　绪　　言

为了讲清问题的由来，我们以电磁场理论的一个问题为例来加以说明. 在学习电磁场理论时，一定会碰到有关坡印亭矢量的推导问题. 我们把推导过程写在下面，以便从中找出需要解决的数学问题.

先写出麦氏方程组

$$\begin{cases} \mathrm{rot}\mathbf{E} = -\dfrac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} & (4\text{-}1) \\ \mathrm{rot}\mathbf{H} = \dfrac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{j} & (4\text{-}2) \end{cases}$$

式中，$\mathbf{E}$ 为电场强度，$\mathbf{H}$ 为磁场强度，$\mathbf{B}$ 为磁感应强度，$\mathbf{D}$ 为电位移，$\mathbf{j}$ 为电流密度.

将方程(4-1)点乘 $\mathbf{H}$，得

$$\mathbf{H}\cdot\mathrm{rot}\mathbf{E} = -\mathbf{H}\cdot\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \tag{4-3}$$

将方程(4-2)点乘 $\mathbf{E}$，得

$$\mathbf{E}\cdot\mathrm{rot}\mathbf{H} = \mathbf{E}\cdot\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{E}\cdot\mathbf{j} \tag{4-4}$$

从方程(4-3)中减去式(4-4)，得

$$\mathbf{H}\cdot\mathrm{rot}\mathbf{E} - \mathbf{E}\cdot\mathrm{rot}\mathbf{H} = -\mathbf{H}\cdot\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \mathbf{E}\cdot\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} - \mathbf{E}\cdot\mathbf{j} \tag{4-5}$$

一般书中推导到这一步时，往往都从有关矢量分析的附录中引用一个现成的公式，即

$$\mathrm{div}(\mathbf{E}\times\mathbf{H}) = \mathbf{H}\cdot\mathrm{rot}\mathbf{E} - \mathbf{E}\cdot\mathrm{rot}\mathbf{H}$$

于是式(4-5)变成

$$\operatorname{div}(\mathbf{E}\times\mathbf{H}) = -\mathbf{H}\cdot\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} - \mathbf{E}\cdot\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t} - \mathbf{E}\cdot\mathbf{j} \tag{4-6}$$

或

$$\operatorname{div}(\mathbf{E}\times\mathbf{H}) + \mathbf{H}\cdot\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} + \mathbf{E}\cdot\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{E}\cdot\mathbf{j} = 0 \tag{4-7}$$

令 $\mathbf{S}=\mathbf{E}\times\mathbf{H}$ 并称之为坡印亭矢量,于是式(4-7)可写成

$$\operatorname{div}\mathbf{S} + \mathbf{H}\cdot\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} + \mathbf{E}\cdot\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{E}\cdot\mathbf{j} = 0 \tag{4-8}$$

方程(4.8)称为坡印亭方程。在电磁场理论中,考虑到 $\mathbf{E}\cdot\mathbf{j}$ 表示为[illegible]能量密度, $\mathbf{H}\cdot\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}$ 表示磁场能量密度对时间的导数,即 $W_m=\frac{1}{2}\mathbf{H}\cdot\mathbf{B}$对时间的导数,也就是

$$\begin{aligned}\frac{\partial W_m}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{2}(\mathbf{H}\cdot\mathbf{B}) = \frac{1}{2}\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t}\cdot\mathbf{B} + \frac{1}{2}\mathbf{H}\cdot\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}\\ &= \frac{1}{2}\mu\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t}\cdot\mathbf{H} + \frac{1}{2}\mu\mathbf{H}\cdot\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t}\end{aligned}$$

由于 $\mathbf{B}=\mu\mathbf{H}$ 并假定 μ 和时间无关,于是得

$$\frac{\partial W_m}{\partial t} = \mu\mathbf{H}\cdot\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t} = \mathbf{H}\cdot\frac{\partial\mu\mathbf{H}}{\partial t} = \mathbf{H}\cdot\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}$$

同样,考虑到 $\mathbf{D}=\varepsilon\mathbf{E}$, 并假定 ε 与时间无关,可证明 $\mathbf{E}\cdot\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}$ 表示电场能量密度 $W_e=\frac{1}{2}\mathbf{E}\cdot\mathbf{D}$ 对时间的导数,即

$$\frac{\partial W_e}{\partial t} = \mathbf{E}\cdot\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}$$

于是式(4.8)变成

$$\frac{\partial}{\partial t}W_m + \frac{\partial}{\partial t}W_e + \operatorname{div}\mathbf{S} = -\mathbf{E}\cdot\mathbf{j} \tag{4-9}$$

将式(4.9)对某一体积 V 积分,得

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V W_m dV + \frac{\partial}{\partial t}\int_V W_e dV + \int_V \operatorname{div}\mathbf{S}dV = -\int_V \mathbf{E}\cdot\mathbf{j}dV$$

应用高斯定理将 $\int_V \text{div}\mathbf{S}dV$ 变成 $\oint_S(\mathbf{S}\cdot\mathbf{n})dS$，这里 S 是包围体积 V 的封闭曲面，$\mathbf{n}$ 为小面积元 dS 上朝向 V 外部的单位法矢量。于是

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V W_m dV + \frac{\partial}{\partial t}\int_V W_e dV + \oint_S(\mathbf{S}\cdot\mathbf{n})dS$$

$$= -\int_V \mathbf{E}\cdot\mathbf{j}dV$$

根据能量不灭定律，$\oint_S(\mathbf{S}\cdot\mathbf{n})dS$ 必须表示通过曲面 S 朝外流动的功率，于是 $\mathbf{S}=\mathbf{E}\times\mathbf{H}$ 可以解释为通过单位面积的功率，这就是坡印亭矢量 $\mathbf{S}$ 的物理意义。

考察整个推导过程，其中数学上的关键的一步是用了公式

$$\text{div}(\mathbf{E}\times\mathbf{H}) = \mathbf{H}\cdot\text{rot}\mathbf{E} - \mathbf{E}\cdot\text{rot}\mathbf{H}$$

问题是：这个公式是从哪里来的？如何证明它？实际上这两个问题可以作为一个来考虑，即如何从左边变换到右边。从原则上来说，回答这个问题并不难，只要根据 div 的定义或表达式，将左边展开，重新组合，再利用 rot 的定义或表达式，即可写成右边的形式。我们将这个过程写在下面，作为以后与符号运算法比较时有关推导方面复杂程度的一个例子。

根据矢量函数 $\text{div}\mathbf{R}$ 的定义，在直角坐标系中

$$\text{div}\mathbf{R} = \frac{\partial R_x}{\partial x} + \frac{\partial R_y}{\partial y} + \frac{\partial R_z}{\partial z}$$

式中，R_x 为矢量 $\mathbf{R}$ 在 x 轴上的分量，R_y 和 R_z 分别为 $\mathbf{R}$ 在 y 和 z 轴上的分量。

又根据 $\mathbf{E}\times\mathbf{H}$ 在直角坐标系中的表达式，

$$\mathbf{E}\times\mathbf{H} = (E_yH_z - E_zH_y)\mathbf{i} + (E_zH_x - E_xH_z)\mathbf{j} + (E_xH_y - E_yH_x)\mathbf{k} \qquad (4\text{-}10)$$

式中，$\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}$ 分别为沿 x,y,z 轴正向的单位矢量。E_x,E_y,E_z 和 H_x,H_y,H_z 分别为矢量 $\mathbf{E},\mathbf{H}$ 在 x,y,z 轴上的分量。从式(4.10)可看出：

$\mathbf{E}\times\mathbf{H}$ 在 x 轴上的分量为 $E_yH_z - E_zH_y$,

$\mathbf{E}\times\mathbf{H}$ 在 y 轴上的分量为 $E_zH_x - E_xH_z$,

$\mathbf{E}\times\mathbf{H}$ 在 z 轴上的分量为 $E_xH_y - E_yH_x$.

于是

$$
\begin{aligned}
\operatorname{div}(\mathbf{E}\times\mathbf{H}) &= \frac{\partial(E_yH_z - E_zH_y)}{\partial x} + \frac{\partial(E_zH_x - E_xH_z)}{\partial y} \\
&\quad + \frac{\partial(E_xH_y - E_yH_x)}{\partial z} \\
&= E_y\frac{\partial H_z}{\partial x} + H_z\frac{\partial E_y}{\partial x} - E_z\frac{\partial H_y}{\partial x} - H_y\frac{\partial E_z}{\partial x} \\
&\quad + E_z\frac{\partial H_x}{\partial y} + H_x\frac{\partial E_z}{\partial y} - E_x\frac{\partial H_z}{\partial y} - H_z\frac{\partial E_x}{\partial y} \\
&\quad + E_x\frac{\partial H_y}{\partial z} + H_y\frac{\partial E_x}{\partial z} - E_y\frac{\partial H_x}{\partial z} - H_x\frac{\partial E_y}{\partial z} \\
&= H_x\left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right) + H_y\left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}\right) \\
&\quad + H_z\left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right) - \left[E_x\left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z}\right)\right. \\
&\quad \left. + E_y\left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x}\right) + E_z\left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y}\right)\right]
\end{aligned}
\tag{4-11}
$$

考虑到

$$\mathbf{E} = E_x\mathbf{i} + E_y\mathbf{j} + E_z\mathbf{k},\quad \mathbf{H} = H_x\mathbf{i} + H_y\mathbf{j} + H_z\mathbf{k}$$

$$
\begin{aligned}
\operatorname{rot}\mathbf{E} &= \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}\right)\mathbf{j} \\
&\quad + \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right)\mathbf{k}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\operatorname{rot}\mathbf{H} &= \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x}\right)\mathbf{j} \\
&\quad + \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y}\right)\mathbf{k}
\end{aligned}
$$

及点积公式

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z$$

于是式(4.11)右边即可写成

$$\mathbf{H}\cdot\mathrm{rot}\mathbf{E}-\mathbf{E}\cdot\mathrm{rot}\mathbf{H}$$

这样就可得到

$$\mathrm{div}(\mathbf{E}\times\mathbf{H})=\mathbf{H}\cdot\mathrm{rot}\mathbf{E}-\mathbf{E}\cdot\mathrm{rot}\mathbf{H}$$

这就是我们要证明的公式.

用同样的方法也可以证明其他矢量分析的公式。因此，从原则上来说，推导矢量分析公式时，没有什么数学上的问题需要解决，只要进行微分运算，重新排列组合，最终一定可以获得所需公式。但是，实际上这个运算过程有时并不简单，甚至很困难。例如，在事先不知道下列公式右边部分的情况下：

$$\mathrm{grad}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})=(\mathbf{b}\cdot\nabla)\mathbf{a}+(\mathbf{a}\cdot\nabla)\mathbf{b}+\mathbf{b}\times\mathrm{rot}\mathbf{a}+\mathbf{a}\times\mathrm{rot}\mathbf{b}$$

想从左边通过微分运算和重新排列组合来得到右边表达式决不是一件容易的事.

我们提出这样一个问题，即不通过微分运算，而单纯用矢量代数公式通过矢量代数运算，能否推导出矢量分析中的所有公式？

用矢量代数运算来代替微分运算的方法称为符号运算法。从公式 $\mathrm{div}(\mathbf{E}\times\mathbf{H})=\mathbf{H}\cdot\mathrm{rot}\mathbf{E}-\mathbf{E}\cdot\mathrm{rot}\mathbf{H}$ 的形式来看，要建立符号运算法是不可能的，因为 div、rot 只不过是矢量函数散度和旋度的术语，这些文字绝对不是一种矢量，甚至从形式上来看也不是矢量代数中矢量和矢量运算的符号.而要用矢量代数来运算，首先需要那怕形式上是矢量代数符号才行，因此在这种符号的形式下，根本就谈不上什么用矢量代数运算来推导公式的问题.

要解决符号运算法问题，首先必须从形式上把矢量函数 $\mathrm{div}\mathbf{R}$, $\mathrm{rot}\mathbf{R}$, $\mathrm{grad}f$ 等表示成矢量的样子，然后才可能用矢量代数公式进行变换。关于这个问题，数学家们已经探讨了将近一百年。下面我们举三个比较有代表性的例子来说明符号运算法的发展过程，同时看看应该怎样正确地提出问题和解决问题，以便为在下文

中系统地进行分析作好准备.

第一个例子是由赫维赛（Heaviside）在他所著《电磁理论》[2]一书中提出的.

首先引入一个符号矢量，即形式上像矢量但实际上不是矢量的一个数学符号：

$$\nabla = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

并定义 ∇ 和矢量函数 $\mathbf{R}$ 的点积为

$$\nabla \cdot \mathbf{R} = \frac{\partial R_x}{\partial x} + \frac{\partial R_y}{\partial y} + \frac{\partial R_z}{\partial z}$$

于是

$$\mathrm{div}\mathbf{R} = \nabla \cdot \mathbf{R}$$

这样就把 $\mathrm{div}\mathbf{R}$ 表示成了 $\nabla \cdot \mathbf{R}$ 的形式，即表示成了一个符号矢量 ∇（通常称为 ∇ 算子）与 $\mathbf{R}$ 的点积形式. 之所以要表示成点积形式，是因为 $\mathrm{div}\mathbf{R}$ 是一个标量（数量），而两个矢量的点积也是一个标量. 于是，

$$\mathrm{div}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H})$$

然后用矢量代数公式对 $\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H})$ 进行形式变换. 这里形式上把 ∇ 看成和普通矢量一样. 利用矢量代数公式

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B})$$

得到

$$\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = \mathbf{E} \cdot (\mathbf{H} \times \nabla) = \mathbf{H} \cdot (\nabla \times \mathbf{E})$$

然后他说："第一项的意义是毫无含糊之处的，但是我们也可用第二项或第三项，条件是 ∇ 的微分性质同时作用于 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{H}$. 如果我们遵守更常用的约定，即运算的对象必须位于算子之后，那么在第三项中只有 $\mathbf{E}$ 被微分，于是我们得到结果的一部分. 而第二项或与它等效的 $-\mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{H})$，其中只有 $\mathbf{H}$ 被微分，给出结果的另一部分. 这样我们就得到了完整的，毫不含糊的结果：

$$\mathrm{div}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = \mathbf{H} \cdot \mathrm{rot}\mathbf{E} - \mathbf{E} \cdot \mathrm{rot}\mathbf{H}"$$

这一段文字是世界上最早的有关符号运算法的论述. 虽然从

逻辑上来说还不完善，但赫维赛指出了对矢量函数的运算有可能运用矢量代数法进行并得到正确的结果．这是方法上的极其关键的突破．它为后人在这方面的研究提供了希望和方向．因此，我们应该说赫维赛是符号运算法的创始人．为了从数学上严格地解决符号运算法问题，我们必须指出他论述上的不严格或含糊不清的地方，因为这些地方的问题正是后人所必须认真解决的．

首先，第一项 $\nabla\cdot(\mathbf{E}\times\mathbf{H})=\mathrm{div}(\mathbf{E}\times\mathbf{H})$ 是需要加以变换的函数，而第三项 $\mathbf{H}\cdot\nabla\times\mathbf{E}=\mathbf{H}\cdot\mathrm{rot}\mathbf{E}$ 用他自己的话来说，是"结果的一部分"．第一和第三项之间是用等号连接起来的．但是，从数学上来说，全部和部分之间不能用等号连接，全部只能写成等于所有分部之和，而不能等于一部分，因此这种写法是不允许的．不过从下文中可以看出，这个问题并不难解决，只要找出所缺的另一部分，把两部分加起来就可以写成等于全部了．

其次，赫维赛并没有给出 $\mathbf{E}\cdot(\mathbf{H}\times\nabla)$ 的明确含义并证明它等于 $-\mathbf{E}\cdot(\nabla\times\mathbf{H})$．这个问题也不难解决，只要适当地给出含 ∇ 的表达式的明确定义，就不难证明 $-\mathbf{E}\cdot(\nabla\times\mathbf{H})=\mathbf{E}\cdot(\mathbf{H}\times\nabla)$ 了．注意，这里的定义和现有公认的定义是不同的，否则不可能相等．

最后，也是最关键的一点，就是为什么对含有 ∇ 的表达式，例如 $\nabla\cdot(\mathbf{E}\times\mathbf{H})$，可以用矢量代数公式进行形式上的运算，且每一步都能得到正确的结果．这里首先要强调的是我们只能说形式上的运算，而不是矢量代数中数学上的合法运算，原因很简单，因为 ∇ 不是一个矢量（它既没有方向又没有长度，而一般矢量有长度和方向），而只是形式上像一个矢量．因此，只能把 ∇ 看成像矢量一样用矢量代数公式进行形式上的运算，每一步结果用规定的定义加以解释，而不能认为 ∇ 就是一个真正的矢量，可以合法地（或数学上正确地）用矢量代数公式进行运算而必然能得到正确的结果．其次要强调的是"每一步都得到正确的结果"这句话．如果对含有 ∇ 的表达式（不单单是 $\nabla\cdot(\mathbf{E}\times\mathbf{H})$ 这一种）用矢量代数公式进行形式上的运算时每一步都能得到正确的结果，那么符号运

算法问题，即使没有证明，也就解决了，因为至少可以用这种方法来推导公式而不必担心会得到不正确的结果。遗憾的是事情并不是这样。下文中的反例将具体表明这一点。正因为用矢量代数公式进行运算时在规定的符号意义的条件下有时可以得到正确的结果，有时却得不到正确的结果，所以很多书上(例如文献[3])都说应用 ∇ 进行符号运算时需要小心谨慎，应对结果加以验算，否则容易出错。可惜一般书上都没有说明怎样做才算小心谨慎，怎样做就不算小心谨慎。事实上，如果能从数学上给出明确的运算规则并证明用这些规则进行运算时每一步始终都能得到正确的结果，那就可以完全有把握地进行运算，而根本用不到验算了，也谈不上小心或不小心的问题。否则，无论怎样“小心”，也不能保证不出差错。事实就是如此。由此可见，从数学上来说，“小心谨慎”是一个很模糊的概念。下文中我们将证明：在应用现有符号 ∇ 和通用定义的前提下，无论怎样小心谨慎也不可能始终得到正确的结果。

我们要举的第二个符号运算法的例子，是 A. Sommerfeld 在其“Electrodynamics”(Academic Press, N. Y. 1952)一书中给出的。他是这样叙述的：

“要变换

$$\mathbf{E}\cdot\mathrm{rot}\mathbf{H}-\mathbf{H}\cdot\mathrm{rot}\mathbf{E}$$

可以利用恒等式

$$\mathbf{B}\cdot\mathrm{rot}\mathbf{A}-\mathbf{A}\cdot\mathrm{rot}\mathbf{B}=\mathrm{div}(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) \tag{1}$$

式中 $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{B}$ 为任意的矢量函数。

证明恒等式(1)的最容易的方法是引入算符 ∇：

$$\nabla=\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x}+\mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y}+\mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

考虑到矢量函数的散度是这个矢量函数和矢量 ∇ 的点积，而矢量函数的旋度则是它和 ∇ 的叉积，于是

$$\mathrm{div}(\mathbf{A}\times\mathbf{B})=\nabla\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B})=\nabla_A\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B})+\nabla_B\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) \tag{1a}$$

$$\mathrm{rot}\mathbf{A}=\nabla\times\mathbf{A},\ \mathrm{rot}\mathbf{B}=\nabla\times\mathbf{B} \tag{1b}$$

在式（1a）中脚标 A 和 B 表示算子 ∇ 只作用于矢量 $\mathbf{A}$ 或矢量 $\mathbf{B}$.
如果利用三个矢量混合积的循环置换规则，则由式（1a）可得

$$\begin{aligned}\mathrm{div}(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) &= \mathbf{B}\cdot(\nabla_A\times\mathbf{A})+\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\nabla_B)\\ &= \mathbf{B}\cdot(\nabla_A\times\mathbf{A})-\mathbf{A}\cdot(\nabla_B\times B) \quad (1c)\end{aligned}$$

根据式(1b)，可以将上列式子的右边写成

$$\mathbf{B}\cdot\mathrm{rot}\mathbf{A}-\mathbf{A}\cdot\mathrm{rot}\mathbf{B}$$

这样（1c）就等于式(1)。这种对式（1）的证明是直角坐标系 x，y，z 内直接的但计算起来却极其复杂的证明的一种缩写方法。”

这里我们看到，Sommerfeld 比赫维赛前进了一步，即在式（1a）中把 $\nabla\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B})$ 明确地分成了 $\nabla_A\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B})$ 和 $\nabla_B\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B})$ 两部分之和. 但是接下去他并没有证明为什么可以利用矢量代数中三个矢量混合积的循环置换规则，也就是没有证明为什么这样做一定可以得到正确的结果. 另外，他也没有专门说明 $\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\nabla_B)$ 的含意. 按照现有通行的约定，$\mathbf{B}\times\nabla_B$ 只表示一个算符而不表示一个矢量，经过矢量代数中有关的公式 $\mathbf{B}\times\mathbf{A}=-\mathbf{A}\times\mathbf{B}$ 的变换，它却变成一个矢量 $-\nabla_B\times\mathbf{B}$，这也是不可理解的。由此可见 Sommerfeld 并没有解决符号运算法问题。

第三个例子是前苏联数学家柯青在他的《向量计算及张量计算初步》(高等教育出版社，1960 年)一书中给出的. 他说：

“如果有两个空间的点的矢量函数 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$，那么利用三个矢量混合积的循环置换性质，就容易得到

$$\begin{aligned}\mathrm{div}(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) &= \nabla\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b}_C)+\nabla\cdot(\mathbf{a}_C\times\mathbf{b})\\ &= (\nabla\times\mathbf{a})\cdot\mathbf{b}_C-\nabla\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{a}_C)\\ &= (\nabla\times\mathbf{a})\cdot\mathbf{b}_C-(\nabla\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{a}_C\\ &= \mathbf{b}_C\cdot(\nabla\times\mathbf{a})-\mathbf{a}_C\cdot(\nabla\times\mathbf{b})\\ &= \mathbf{b}\cdot(\nabla\times\mathbf{a})-\mathbf{a}\cdot(\nabla\times\mathbf{b})\end{aligned}$$

(这里 $\mathbf{a}_C$ 和 $\mathbf{b}_C$ 表示 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 在微分时视为常数)也就是

$$\mathrm{div}(\mathbf{a}\times\mathbf{b})=\mathbf{b}\cdot\mathrm{rot}\mathbf{a}-\mathbf{a}\cdot\mathrm{rot}\mathbf{b}$$

由此可见运算的方法如下：当除了一个矢量外其余矢量都是常数时，应该这样来变换表达式，即使所有常矢量都位于 ∇ 算子之

前，而变矢量则在它之后."

这里柯青较 Sommerfeld 又前进了一步，他在没有证明的前提下，给出了最终可得到正确结果的规则. 这说明符号运算法是完全可行的，只要按他的规则去做，最终一定可以得到正确的结果. 但是他没有说明：虽然结果正确，可是中间运算步骤该如何理解和处理？因为中间步骤是用等号与前后连接起来的，但是它的意义却很可能是和前或后不相等的，该如何来理解这个现象？为什么最终的结果又是正确的？他并没有给出证明或说明.

为了彻底解决符号运算法问题，从下一节开始，我们将对 ∇ 算子表达式含义的约定作仔细的探讨，并从数学上明确指明符号运算法规则，然后通过反例证明用现有 ∇ 算子是不可能满足符号运算法规则要求的，从而引入新的符号矢量，并从数学上严格证明这种新符号矢量运算法的可行性. 在此基础上我们再回过头来重新理解赫维赛论述的真正含意是什么，并证明柯青运算法的正确性和说明应该如何理解运算的中间步骤问题.

4-2 ▽ 算 子

在矢量分析中广泛地应用着称为 Hamilton 算子或 Nabla 算子的符号 ∇. 它是 Hamilton 在四元算法中首先引入的. 在直角坐标系中，∇ 定义为下列形式的符号矢量：

$$\nabla = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z} \tag{4-12}$$

式中，$\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}$ 分别为沿 x,y,z 轴正向的单位矢量.

注意，这只是一个数学上的符号. 它由三个单位矢量 $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ 和三个微分符号 $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$, $\frac{\partial}{\partial z}$ 及加号组合而成. 它形式上像一个矢量，因为在它的表示式中有 $\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}$ 三个矢量. 这是它称为符号矢量的原因. 但它又不是一个真正的矢量，因为 $\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x}$ 等不是矢量，而只是矢量符号和微分符号的组合. 它既谈不上有什么方向，

也谈不上有什么长度，而是矢量代数和微积分中都没有的一个新的数学符号。正因为它是一个新的数学符号，我们就必须对它与其他函数结合的意义加以规定或定义，然后再去研究这些定义的性质或作出一些数学上有意义的推论。

在没有定义之前就去谈论∇和另一个矢量$\mathbf{R}$的点积或叉积在数学上是毫无意义的，因为我们并不知道 $\nabla\cdot\mathbf{R}$ 意味着什么。有些文献中说，根据矢量代数公式，$\nabla\cdot\mathbf{R}$ 就是

$$\nabla\cdot\mathbf{R}=\frac{\partial R_x}{\partial x}+\frac{\partial R_y}{\partial y}+\frac{\partial R_z}{\partial z}$$

这里有两个问题。第一，∇不是矢量，没有什么根据说矢量代数公式对它适用。第二，即使用矢量代数公式写出了

$$\nabla\cdot\mathbf{R}=\frac{\partial R_x}{\partial x}+\frac{\partial R_y}{\partial y}+\frac{\partial R_z}{\partial z}$$

也只意味着这是对 $\nabla\cdot\mathbf{R}$ 意义的规定或定义，而不是矢量代数中∇和 $\mathbf{R}$ 点积的结果，因为∇不是矢量。这个公式不是∇点乘 $\mathbf{R}$ 的结果，而是 $\nabla\cdot\mathbf{R}$ 的定义。

总而言之，我们不能对∇套用矢量代数的公式，因为∇不是矢量。∇和其他函数结合的意义只能是定义而不是数学上的运算结果。

那么，∇和其他函数的结合是怎样定义的呢？历史上存在两种不同的定义方式，但所得结果在直角坐标系中是一样的。结果一样是一个必须满足的要求，因为如果对同一符号不同的定义方式意味着不同的结果，那我们只能选取其中的一种定义，否则就不知道这个符号表示的是什么了。

4.2.1 ∇ 看成为符号矢量（第一定义方式或赫维赛定义方式[2]）

在这种定义方式下，把∇看成是一个“分量”为 $\frac{\partial}{\partial x}$，$\frac{\partial}{\partial y}$，$\frac{\partial}{\partial z}$ 的“矢量”，它和其他函数结合的意义规定如下。

现先以 $\nabla \cdot \mathbf{R}$ 为例，以后再推广到其他情况．$\nabla \cdot \mathbf{R}$ 的定义（约定）如下：

（1）把 ∇ 中的三个微分符号看成矢量的分量（数字）一样，从形式上进行矢量代数运算．

（2）利用矢量代数中关于点积的公式，即若有两个矢量：

$$\mathbf{A} = \mathbf{i}A_x + \mathbf{j}A_y + \mathbf{k}A_z$$
$$\mathbf{B} = \mathbf{i}B_x + \mathbf{j}B_y + \mathbf{k}B_z$$

则以

$$\begin{aligned}\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} &= A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z \\ &= B_xA_x + A_yB_y + A_zB_z \\ &= B_xA_x + B_yA_y + A_zB_z \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned} \tag{4-13}$$

来形成 ∇ 和 $\mathbf{R}$ 的点积．这里：

$$\nabla = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

$$\mathbf{R} = \mathbf{i}R_x + \mathbf{j}R_y + \mathbf{k}R_z$$

（3）形成点积时，公式中分量的顺序规定与表达式 $\nabla \cdot \mathbf{R}$ 中 ∇ 和 $\mathbf{R}$ 的顺序一样，即 ∇ 的“分量”始终放在 $\mathbf{R}$ 的分量之前．只有在此条件下，我们才能得到

$$\nabla \cdot \mathbf{R} = \frac{\partial}{\partial x}R_x + \frac{\partial}{\partial y}R_y + \frac{\partial}{\partial z}R_z \tag{4-14}$$

注意，如果没有这个条件而只是笼统地用矢量代数公式来形成点积，那么，$\nabla \cdot \mathbf{R}$ 也可写成如

$$\nabla \cdot \mathbf{R} = R_x\frac{\partial}{\partial x} + R_y\frac{\partial}{\partial y} + R_z\frac{\partial}{\partial z}$$

等等，它的意义就不确定了．之所以要规定顺序，是因为在矢量代数的点积公式中，各分量的顺序是无关紧要的，因 $A_xB_x = B_xA_x$（两数的乘积与其顺序无关），可是 $R_x\frac{\partial}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial}{\partial x}R_x$ 的意义却完全不同，前者是一个微分算子，后者是 R_x 的偏导数，因此必须

规定一种顺序。这里对 $\nabla\cdot\mathbf{R}$ 规定的顺序是 ∇ 在前，$\mathbf{R}$ 在后。之所以要这样规定，是因为按照这种规定最后可以得到 $\mathrm{div}\mathbf{R}$ 表达式，否则就得不到。但是必须明确，这只是一种规定，并不是非要这样做才行。换一种规定只不过得到另一种含义的数学表达式而已，从数学上来说并没有什么不可以或不对的地方。

(4) 乘积 $\frac{\partial}{\partial x}R_x$，$\frac{\partial}{\partial y}R_y$，$\frac{\partial}{\partial z}R_z$ 规定为偏导数

$$\frac{\partial R_x}{\partial x},\ \frac{\partial R_y}{\partial y},\ \frac{\partial R_z}{\partial z} \tag{4-15}$$

于是按照上面对 $\nabla\cdot\mathbf{R}$ 含义的规定，我们得到

$$\nabla\cdot\mathbf{R}=\frac{\partial R_x}{\partial x}+\frac{\partial R_y}{\partial y}+\frac{\partial R_z}{\partial z} \tag{4-16}$$

即 $\mathbf{R}$ 的散度 $\mathrm{div}\mathbf{R}$。上面所列举的就是对 $\nabla\cdot\mathbf{R}$ 含义的公认的定义或规定。我们再一次强调：∇ 和 $\mathbf{R}$ 的点积即 $\nabla\cdot\mathbf{R}$ 是一种定义而不是矢量代数中的合法运算。

现在让我们来根据上面关于点积的规定，看一看 $\mathbf{R}\cdot\nabla$ 意味着什么。根据第(3)条，形成点积时，公式中分量的顺序应和表达式 $\mathbf{R}\cdot\nabla$ 中 $\mathbf{R}$ 和 ∇ 的顺序一样(注意，这只是一种规定)，即 $\mathbf{R}$ 的分量始终放在 ∇ 的分量之前，我们得到

$$\mathbf{R}\cdot\nabla=R_x\frac{\partial}{\partial x}+R_y\frac{\partial}{\partial y}+R_z\frac{\partial}{\partial z} \tag{4-17}$$

这是一个微分算符，它是三个微分算符之和。

与上面关于点积的定义相类似，∇ 和另一矢量 $\mathbf{R}$ 的叉积定义(规定)如下：

(1) 把 ∇ 中的三个微分符号看成矢量的分量(数字)，从形式上进行矢量代数运算。

(2) 利用矢量代数中关于叉积的公式，即若有两个矢量：

$$\mathbf{A}=\mathbf{i}A_x+\mathbf{j}A_y+\mathbf{k}A_z$$
$$\mathbf{B}=\mathbf{i}B_x+\mathbf{j}B_y+\mathbf{k}B_z$$

则以

$$
\begin{aligned}
\mathbf{A}\times\mathbf{B} &= \mathbf{i}(A_yB_z - A_zB_y) + \mathbf{j}(A_zB_x - A_xB_z) \\
&\quad + \mathbf{k}(A_xB_y - A_yB_x) \\
&= \mathbf{i}(B_zA_y - B_yA_z) + \mathbf{j}(A_zB_x - B_zA_x) \\
&\quad + \mathbf{k}(B_yA_x - B_xA_y) \\
&= \cdots
\end{aligned}
$$

来形成 ∇ 和 $\mathbf{R}$ 的叉积，这里:

$$\mathbf{R} = \mathbf{i}R_x + \mathbf{j}R_y + \mathbf{k}R_z$$

$$\nabla = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

(3) 形成叉积时公式中分量的顺序规定为与 $\nabla\times\mathbf{R}$ 表达式中 ∇ 和 $\mathbf{R}$ 的顺序一样，即 ∇ 的“分量”始终放在 $\mathbf{R}$ 的分量之前。在此条件下，我们得到

$$
\begin{aligned}
\nabla\times\mathbf{R} &= \mathbf{i}\left[\frac{\partial}{\partial y}\ R_z - \frac{\partial}{\partial z}\ R_y\right] + \mathbf{j}\left[\frac{\partial}{\partial z}\ R_x - \frac{\partial}{\partial x}\ R_z\right] \\
&\quad + \mathbf{k}\left[\frac{\partial}{\partial x}\ R_y - \frac{\partial}{\partial y}\ R_x\right]
\end{aligned}
$$

(4) 乘积 $\frac{\partial}{\partial y} R_z$ 等规定为偏导数 $\frac{\partial R_z}{\partial y}$ 等，最后得到

$$
\begin{aligned}
\nabla\times\mathbf{R} &= \mathbf{i}\left[\frac{\partial R_z}{\partial y} - \frac{\partial R_y}{\partial z}\right] + \mathbf{j}\left[\frac{\partial R_x}{\partial z} - \frac{\partial R_z}{\partial x}\right] \\
&\quad + \mathbf{k}\left[\frac{\partial R_y}{\partial x} - \frac{\partial R_x}{\partial y}\right]
\end{aligned}
\qquad (4\text{-}18)
$$

这就是 $\mathrm{rot}\mathbf{R}$。

可见 $\nabla\times\mathbf{R} = \mathrm{rot}\mathbf{R}$ 是对 $\nabla\times\mathbf{R}$ 定义后的结果，而不是数学上的运算结果。

根据同样的定义方式，尤其是关于保持矢量分量顺序的规定，我们得到 $\mathbf{R}\times\nabla$ 的定义如下:

$$\mathbf{R}\times\nabla = \mathbf{i}\left[R_y\frac{\partial}{\partial z} - R_z\frac{\partial}{\partial y}\right] + \mathbf{j}\left[R_z\frac{\partial}{\partial x} - R_x\frac{\partial}{\partial z}\right]$$

$$+\mathbf{k}\left[R_x\frac{\partial}{\partial y}-R_y\frac{\partial}{\partial x}\right] \tag{4-19}$$

它是一个微分算符。注意，这完全是定义的结果，而不是数学上的合法运算结果。

将定义了的算符$(\mathbf{a}\cdot\nabla)$（见式(4-17)）应用到函数 $\mathbf{f}$ 上，我们得到

$$(\mathbf{a}\cdot\nabla)\mathbf{f}=a_x\frac{\partial\mathbf{f}}{\partial x}+a_y\frac{\partial\mathbf{f}}{\partial y}+a_z\frac{\partial\mathbf{f}}{\partial z} \tag{4-20}$$

这就是函数 $\mathbf{f}$ 在矢量 $\mathbf{a}$ 方向上的导数乘上 $\mathbf{a}$ 的幅值。
用同样的方式得到 ∇f 的定义如下：

$$\nabla f=\mathbf{i}\frac{\partial f}{\partial x}+\mathbf{j}\frac{\partial f}{\partial y}+\mathbf{k}\frac{\partial f}{\partial z}$$

这就是函数 f 的梯度，即 $\mathrm{grad}f$。

再来看看 $(\mathbf{a}\times\nabla)\cdot\mathbf{R}$ 的定义是什么。根据矢量代数公式，在保持各矢量先后顺序不变的前提下，$(\mathbf{a}\times\nabla)\cdot\mathbf{R}=\mathbf{a}\cdot(\nabla\times\mathbf{R})$，即等于 $\mathbf{a}$ 和 $\nabla\times\mathbf{R}$ 的点积，因此可立即写出

$$\begin{aligned}(\mathbf{a}\times\nabla)\cdot\mathbf{R}&=\mathbf{a}\cdot(\nabla\times\mathbf{R})\\&=a_x\left(\frac{\partial R_z}{\partial y}-\frac{\partial R_y}{\partial z}\right)+a_y\left(\frac{\partial R_x}{\partial z}-\frac{\partial R_z}{\partial x}\right)\\&\quad+a_z\left(\frac{\partial R_y}{\partial x}-\frac{\partial R_x}{\partial y}\right)\end{aligned}$$

最后，我们再来看看 $(\mathbf{a}\times\nabla)\times\mathbf{R}$ 的定义是什么。由式(4.19)我们知道

$$(\mathbf{a}\times\nabla)_x=a_y\frac{\partial}{\partial z}-a_z\frac{\partial}{\partial y}$$

$$(\mathbf{a}\times\nabla)_y=a_z\frac{\partial}{\partial x}-a_x\frac{\partial}{\partial z}$$

$$(\mathbf{a}\times\nabla)_z=a_x\frac{\partial}{\partial y}-a_y\frac{\partial}{\partial x}$$

根据矢量代数中的叉积公式，并使 $\mathbf{a}$、∇，$\mathbf{R}$ 各分量的次序保持不

变，得

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{a}\times\nabla)\times\mathbf{R} = & [(\mathbf{a}\times\nabla)_y R_z-(\mathbf{a}\times\nabla)_z R_y]\mathbf{i} \\
& +[(\mathbf{a}\times\nabla)_z R_x-(\mathbf{a}\times\nabla)_x R_z]\mathbf{j} \\
& +[(\mathbf{a}\times\nabla)_x R_y-(\mathbf{a}\times\nabla)_y R_x]\mathbf{k} \\
= & \mathbf{i}\left[a_z\frac{\partial R_z}{\partial x}-a_x\frac{\partial R_z}{\partial z}-a_x\frac{\partial R_y}{\partial y}+a_y\frac{\partial R_y}{\partial x}\right] \\
& +\mathbf{j}\left[a_x\frac{\partial R_x}{\partial y}-a_y\frac{\partial R_x}{\partial x}-a_y\frac{\partial R_z}{\partial z}+a_z\frac{\partial R_z}{\partial y}\right] \\
& +\mathbf{k}\left[a_y\frac{\partial R_y}{\partial z}-a_z\frac{\partial R_y}{\partial y}-a_z\frac{\partial R_x}{\partial x}+a_x\frac{\partial R_x}{\partial z}\right]
\end{aligned}
\tag{4-21}
$$

这就是 $(\mathbf{a}\times\nabla)\times\mathbf{R}$ 的定义。

我们还要指出一批公认的表达式的意义。由于已经定义 $\nabla a=\mathrm{grad}a$，$\nabla\cdot\mathbf{a}=\mathrm{div}\mathbf{a}$，$\nabla\times\mathbf{a}=\mathrm{rot}\mathbf{a}$，于是规定下列表达式的意义为：

$$(\nabla a)\cdot\mathbf{f}=\mathrm{grad}a\cdot\mathbf{f} \tag{4-22}$$

$$(\nabla\cdot\mathbf{a})\mathbf{f}=(\mathrm{div}\mathbf{a})\mathbf{f} \tag{4-23}$$

$$(\nabla\times\mathbf{a})\cdot\mathbf{f}=(\mathrm{rot}\mathbf{a})\cdot\mathbf{f} \tag{4-24}$$

$$(\nabla\times\mathbf{a})\times\mathbf{f}=(\mathrm{rot}\mathbf{a})\times\mathbf{f} \tag{4-25}$$

$$(\nabla a)\times\mathbf{f}=\mathrm{grad}a\times\mathbf{f} \tag{4-26}$$

$$(\nabla\times\mathbf{a})f=(\mathrm{rot}\mathbf{a})f \tag{4-27}$$

它们的特点是 ∇ 只和括号内的函数有关。这样的规定是很自然的，与符号运算法没有什么联系。下文中我们将会看到，正是式(4.22)至(4.27)的规定使得采用 ∇ 这个符号时符号运算法不能始终成立。

我们将所有符号及其定义和含义列举在表 1 中。

表 1 中的符号和它们的定义都是在矢量分析发展过程中引入的，它们现在已为全世界所公认。因此，运用这些符号时我们必须按中间一列的定义来理解。这些符号的定义与下文中所讨论的符号的运算法并无直接联系。

表 1　∇ 表达式的定义

符号	定 义 为	等于
∇f	$\mathbf{i}\frac{\partial f}{\partial x}+\mathbf{j}\frac{\partial f}{\partial y}+\mathbf{k}\frac{\partial f}{\partial z}$	$\mathrm{grad} f$
$\nabla\cdot\mathbf{f}$	$\frac{\partial R_x}{\partial x}+\frac{\partial R_y}{\partial y}+\frac{\partial R_z}{\partial z}$	$\mathrm{div}\mathbf{f}$
$\nabla\times\mathbf{f}$	$\mathbf{i}\left[\frac{\partial R_z}{\partial y}-\frac{\partial R_y}{\partial z}\right]+\mathbf{j}\left[\frac{\partial R_x}{\partial z}-\frac{\partial R_z}{\partial x}\right]+\mathbf{k}\left[\frac{\partial R_y}{\partial x}-\frac{\partial R_x}{\partial y}\right]$	$\mathrm{rot}\mathbf{f}$
$\mathbf{R}\cdot\nabla$	$R_x\frac{\partial}{\partial x}+R_y\frac{\partial}{\partial y}+R_z\frac{\partial}{\partial z}$	微分算符
$(\mathbf{a}\cdot\nabla)\mathbf{R}$	$a_x\frac{\partial\mathbf{R}}{\partial x}+a_y\frac{\partial\mathbf{R}}{\partial y}+a_z\frac{\partial\mathbf{R}}{\partial z}$	$\mathbf{R}$ 在 $\mathbf{a}$ 方向上的导数乘以 $\mathbf{a}$ 的幅值
$(\mathbf{a}\times\nabla)\cdot\mathbf{R}$	$a_x\left(\frac{\partial R_z}{\partial y}-\frac{\partial R_y}{\partial z}\right)+a_y\left(\frac{\partial R_x}{\partial z}-\frac{\partial R_z}{\partial x}\right)+a_z\left(\frac{\partial R_y}{\partial x}-\frac{\partial R_x}{\partial y}\right)$	$\mathbf{a}$ 和 $\mathrm{rot}\mathbf{R}$ 的点积
$(\mathbf{a}\times\nabla)\times\mathbf{R}$	$\mathbf{i}\left[a_z\frac{\partial R_z}{\partial x}-a_x\frac{\partial R_z}{\partial z}-a_x\frac{\partial R_y}{\partial y}+a_y\frac{\partial R_y}{\partial x}\right]+\mathbf{j}\left[a_z\frac{\partial R_z}{\partial y}-a_y\frac{\partial R_x}{\partial x}-a_y\frac{\partial R_z}{\partial z}+a_x\frac{\partial R_x}{\partial y}\right]+\mathbf{k}\left[a_y\frac{\partial R_y}{\partial z}-a_z\frac{\partial R_y}{\partial y}-a_z\frac{\partial R_x}{\partial x}+a_x\frac{\partial R_x}{\partial z}\right]$	某一矢量
$(\nabla a)\cdot\mathbf{f}$	∇a 与 $\mathbf{f}$ 的点积	$\mathrm{grad}\,a\cdot\mathbf{f}$
$(\nabla\cdot\mathbf{a})\mathbf{f}$	$\nabla\cdot\mathbf{a}$ 乘以 $\mathbf{f}$	$(\mathrm{div}\mathbf{a})\mathbf{f}$
$(\nabla\times\mathbf{a})\cdot\mathbf{f}$	$\nabla\times\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{f}$ 的点积	$\mathrm{rot}\mathbf{a}\cdot\mathbf{f}$
$(\nabla a)\times\mathbf{f}$	∇a 与 $\mathbf{f}$ 的叉积	$\mathrm{grad}\,a\times\mathbf{f}$
$(\nabla\times\mathbf{a})\times\mathbf{f}$	$\nabla\times\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{f}$ 的叉积	$\mathrm{rot}\mathbf{a}\times\mathbf{f}$

4.2.2 ∇ 看成是微分算符的组合（第二定义方式或 Wilson 定义方式[7]）

在这种定义方式中 ∇ 不是看成一个形式矢量，而是看成一组与 **i**, **j**, **k** 写在一起的算符，它的展开形式为

$$\nabla = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

从形式上看，它与以前的矢量形式是一样的，但是它与另一矢量的点积和叉积的定义与第一种方式不同，不过定义结果是一样的。我们应该预料到这一点，因为同一符号应表示同一意义，否则不同的意义就要用不同的符号表示了。

先以 $\nabla \cdot \mathbf{R}$ 为例来说明。

在第二种定义方式中，$\nabla \cdot \mathbf{R}$ 的定义如下。

(1) 先将 $\nabla \cdot \mathbf{R}$ 写成展开了的形式：

$$\nabla \cdot \mathbf{R} = \left(\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot \mathbf{R}$$

(2) 规定分配律仍然适用，从而得出

$$\nabla \cdot \mathbf{R} = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} \cdot \mathbf{R} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} \cdot \mathbf{R} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z} \cdot \mathbf{R}$$

实际上，这就是规定（不是运算！）

$$\left(\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot \mathbf{R}$$

可写成

$$\left(\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} \cdot \mathbf{R} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} \cdot \mathbf{R} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z} \cdot \mathbf{R}\right)$$

(3) 定义

$$\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} \cdot \mathbf{R} = \mathbf{i} \cdot \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x}$$

也就是定义符号组合 $\frac{\partial}{\partial x}\cdot$ 的意义为 $\cdot\frac{\partial}{\partial x}$. 必须指出，符号组合

$\dfrac{\partial}{\partial x}\cdot$ 在数学上是没有意义的，因为点积指的是两个矢量之间的一种运算，而不是对一个矢量的单独运算。因此，$\cdot\mathbf{f}$ 是没有意义的，从而 $\dfrac{\partial}{\partial x}\cdot\mathbf{f}$ 也没有意义。定义 $\dfrac{\partial}{\partial x}\cdot=\cdot\dfrac{\partial}{\partial x}$ 只是对符号组合赋予一定的意义，因为 $\cdot\dfrac{\partial\mathbf{R}}{\partial x}$ 表示矢量 $\mathbf{R}$ 的偏导数（仍是矢量）和可能的另一矢量（有的话）进行点积的符号。当然，这要在点积符号之前另有一矢量才行。如果在点积符号之前的不是另一矢量而是一个标量函数，那么即使定义 $\dfrac{\partial}{\partial x}\cdot\mathbf{R}=\cdot\dfrac{\partial\mathbf{R}}{\partial x}$，也没有任何实际意义，因为矢量函数不能和标量函数进行点积运算。但是，在我们的表达式中，点积号之前是单位矢量 $\mathbf{i}$。这样，将 $\dfrac{\partial}{\partial x}\cdot\mathbf{R}$ 定义为 $\cdot\dfrac{\partial\mathbf{R}}{\partial x}$ 之后就可和 $\mathbf{i}$ 进行点积而得出数学上有意义的结果。

按照上述定义，我们得到

$$\nabla\cdot\mathbf{R}=\mathbf{i}\cdot\frac{\partial\mathbf{R}}{\partial x}+\mathbf{j}\cdot\frac{\partial\mathbf{R}}{\partial y}+\mathbf{k}\cdot\frac{\partial\mathbf{R}}{\partial z}$$

下面来进行矢量代数及分析中的合法运算。由于 $\mathbf{i}$ 是常矢量，由矢量分析我们知道，

$$\mathbf{i}\cdot\frac{\partial\mathbf{R}}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{i}\cdot\mathbf{R})=\frac{\partial R_x}{\partial x}$$

同理

$$\mathbf{j}\cdot\frac{\partial\mathbf{R}}{\partial y}=\frac{\partial R_y}{\partial y},\ \mathbf{k}\cdot\frac{\partial\mathbf{R}}{\partial z}=\frac{\partial R_z}{\partial z}$$

从而

$$\nabla\cdot\mathbf{R}=\frac{\partial R_x}{\partial x}+\frac{\partial R_y}{\partial y}+\frac{\partial R_z}{\partial z}$$

与第一定义方式的结果一样。

对于第二种定义方式，关键的一点是定义 $\mathbf{i}\dfrac{\partial}{\partial x}\cdot\mathbf{f}$ 为 $\mathbf{i}\cdot\dfrac{\partial\mathbf{f}}{\partial x}$。

它不是数学上的合法运算，而只是对 $\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x}\cdot\mathbf{f}$ 意义的定义。

用同样的方式我们定义 $\nabla\times\mathbf{R}$ 如下。

(1) 写出

$$\nabla\times\mathbf{R}=\left(\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x}+\mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y}+\mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\times\mathbf{R}$$

(2) 定义

$$\left(\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x}+\mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y}+\mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\times\mathbf{R}=\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x}\times\mathbf{R}+\mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y}\times\mathbf{R}+\mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}\times\mathbf{R}$$

(3) 定义

$$\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x}\times\mathbf{R}=\mathbf{i}\times\frac{\partial\mathbf{R}}{\partial x},\quad \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y}\times\mathbf{R}=\mathbf{j}\times\frac{\partial\mathbf{R}}{\partial y},$$

$$\mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}\times\mathbf{R}=\mathbf{k}\times\frac{\partial\mathbf{R}}{\partial z}$$

注意，这里 $\frac{\partial}{\partial x}\times=\times\frac{\partial}{\partial x}$ 是定义而不是运算。

(4) 进行变换，得

$$\begin{aligned}\nabla\times\mathbf{R}&=\mathbf{i}\times\frac{\partial\mathbf{R}}{\partial x}+\mathbf{j}\times\frac{\partial\mathbf{R}}{\partial y}+\mathbf{k}\times\frac{\partial\mathbf{R}}{\partial z}\\&=\frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{i}\times\mathbf{R})+\frac{\partial}{\partial y}(\mathbf{j}\times\mathbf{R})+\frac{\partial}{\partial z}(\mathbf{k}\times\mathbf{R})\\&=\frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{k}R_y-\mathbf{j}R_z)+\frac{\partial}{\partial y}(\mathbf{i}R_z-\mathbf{k}R_x)\\&\quad+\frac{\partial}{\partial z}(\mathbf{j}R_x-\mathbf{i}R_y)\\&=\mathbf{i}\left(\frac{\partial R_z}{\partial y}-\frac{\partial R_y}{\partial z}\right)+\mathbf{j}\left(\frac{\partial R_x}{\partial z}-\frac{\partial R_z}{\partial x}\right)\\&\quad+\mathbf{k}\left(\frac{\partial R_y}{\partial x}-\frac{\partial R_x}{\partial y}\right)\\&=\mathrm{rot}\mathbf{R}\end{aligned}$$

与第一定义方式的结果一样。

同样，$\mathbf{R}\times\nabla$ 的定义如下：

$$\mathbf{R}\times\nabla=\mathbf{R}\times\left(\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x}+\mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y}+\mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\quad\text{（展开式形式）}$$

$$=\left(\mathbf{R}\times\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x}+\mathbf{R}\times\mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y}+\mathbf{R}\times\mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\quad\text{（定义）}$$

$$=\mathbf{i}\left(R_y\frac{\partial}{\partial z}-R_z\frac{\partial}{\partial y}\right)+\mathbf{j}\left(R_z\frac{\partial}{\partial x}-R_x\frac{\partial}{\partial z}\right)$$

$$+\mathbf{k}\left(R_x\frac{\partial}{\partial y}-R_y\frac{\partial}{\partial x}\right)\quad\text{（运算）}$$

$$=\text{微分算子}\quad\text{（结果）}$$

与第一定义方式的结果一样。

同样

$$(\mathbf{a}\cdot\nabla)\mathbf{R}=\left[\mathbf{a}\cdot\left(\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x}+\mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y}+\mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\right]\mathbf{R}$$

$$=\left(\mathbf{a}\cdot\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x}+\mathbf{a}\cdot\mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y}+\mathbf{a}\cdot\mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\mathbf{R}\quad\text{（定义）}$$

$$=\left(a_x\frac{\partial}{\partial x}+a_y\frac{\partial}{\partial y}+a_z\frac{\partial}{\partial z}\right)\mathbf{R}\quad\text{（运算）}$$

$$=a_x\frac{\partial\mathbf{R}}{\partial x}+a_y\frac{\partial\mathbf{R}}{\partial y}+a_z\frac{\partial\mathbf{R}}{\partial z}\quad\text{（结果）}$$

与第一定义方式的结果一样。

容易验证，按第二定义方式定义 $(\mathbf{a}\times\nabla)\cdot\mathbf{R}$ 和 $(\mathbf{a}\times\nabla)\times\mathbf{R}$ 所得到的结果，与按第一定义方式所得的结果完全一致。

显然，

$$\nabla f=\mathbf{i}\frac{\partial f}{\partial x}+\mathbf{j}\frac{\partial f}{\partial y}+\mathbf{k}\frac{\partial f}{\partial z}$$

由此可以得出结论：在直角坐标系中，第一定义方式和第二定义方式所得结果是完全一样的。两种定义方式的差别仅在于，是把 ∇ 看成一个符号矢量并用矢量代数公式进行形式上的运算，还是

把 ∇ 看成一个算符的组合并规定微分算符与点(叉)积的顺序可以互换.

以后我们将看到,在曲线坐标系中,第一定义方式和第二定义方式所得结果是不一样的. 这时,为了避免意义上混淆,我们只能选取一种定义方式.

4-3 拉普拉斯算子的定义

在矢量分析和数理方程中，广泛地使用着称为拉普拉斯算子的算符. 我们先给出它的明确定义，然后再讨论它和矢量分析的关系.

首先,拉普拉斯算子的通用符号是

$$\nabla^2 \text{ 或 } \Delta$$

在直角坐标系中,它的定义是:

$$\nabla^2 = \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{4-28}$$

作用在标量函数 φ 上,得到

$$\nabla^2\varphi = \Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}$$

作用在矢量函数 $\mathbf{R}$ 上,得到

$$\nabla^2\mathbf{R} = \Delta\mathbf{R} = \frac{\partial^2\mathbf{R}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\mathbf{R}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\mathbf{R}}{\partial z^2}$$

现在来考察一下 $\nabla^2(\Delta)$ 和矢量分析的关系. 我们证明: 作用在标量函数上时,

$$\nabla^2\varphi = \text{div grad}\varphi = \nabla\cdot(\nabla\varphi) \tag{4-29}$$

证明:

$$\nabla^2\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} \tag{4-30}$$

这是它的定义.

另一方面

$$\text{grad}\varphi = \nabla\varphi = \mathbf{i}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial\varphi}{\partial z}$$

$$\begin{aligned}\text{div grad}\varphi &= \nabla\cdot(\nabla\varphi)\\ &= \frac{\partial}{\partial x}(\text{grad}\varphi)_x + \frac{\partial}{\partial y}(\text{grad}\varphi)_y + \frac{\partial}{\partial z}(\text{grad}\varphi)_z\\ &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)\\ &= \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} \qquad (4\text{-}31)\end{aligned}$$

与(4-30)相比较，结果完全一致，由此得证。

由于 grad，div 的运算都是和坐标系无关的运算，因此可以得出结论说：$\nabla^2(\Delta)$ 是一个与具体坐标系无关的算子。

由于在矢量分析中，grad$\mathbf{R}$ 和 $\nabla\mathbf{R}$ 无意义，因此不能说：

$$\nabla^2\mathbf{R} = \Delta\mathbf{R} = \text{div grad}\mathbf{R}$$

但是，在并矢分析中，由于 grad $\mathbf{R}$ 和 div grad $\mathbf{R}$ 都有明确的定义，因此可以说：

$$\nabla^2\mathbf{R} = \Delta\mathbf{R} = \text{div grad }\mathbf{R}$$

关于这一点，我们留在并矢分析一章中讨论。

现在来看看曲线坐标系中的 $\nabla^2\varphi$，$\nabla^2\mathbf{R}$ 表达式是什么。

由于

$$\nabla^2\varphi = \text{div grad}\varphi$$

而在正交曲线坐标系中

$$\text{grad}\varphi = \nabla\varphi = \frac{\mathbf{e}_u}{L_u}\frac{\partial\varphi}{\partial u} + \frac{\mathbf{e}_v}{L_v}\frac{\partial\varphi}{\partial v} + \frac{\mathbf{e}_w}{L_w}\frac{\partial\varphi}{\partial w} = \mathbf{F}$$

$$\text{div}\mathbf{F} = \frac{1}{L_uL_vL_w}\left[\frac{\partial(L_vL_wF_u)}{\partial u} + \frac{\partial(L_wL_uF_v)}{\partial v} + \frac{\partial(L_uL_vL_w)}{\partial w}\right]$$

将 $F_u = \frac{1}{L_u}\frac{\partial\varphi}{\partial u}$，$F_v = \frac{1}{L_v}\frac{\partial\varphi}{\partial v}$，$F_w = \frac{1}{L_w}\frac{\partial\varphi}{\partial w}$ 代入 div$\mathbf{F}$ 表达

式中，得

$$\text{div grad}\varphi = \frac{1}{L_u L_v L_w}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{L_v L_w}{L_u}\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right) + \frac{1}{\partial v}\left(\frac{L_w L_u}{L_v}\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)\right.$$

$$\left. + \frac{1}{\partial w}\left(\frac{L_u L_v}{L_w}\frac{\partial\varphi}{\partial w}\right)\right]$$

最后得在正交曲线坐标系中

$$\nabla^2\varphi = \Delta\varphi = \frac{1}{L_u L_v L_w}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{L_v L_w}{L_u}\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{L_w L_u}{L_v}\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)\right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{L_u L_v}{L_w}\frac{\partial\varphi}{\partial w}\right)\right] \tag{4-32}$$

由于 $\mathbf{R} = \mathbf{i}R_x + \mathbf{j}R_y + \mathbf{k}R_z$，将 R_x，R_y，R_z 分别代入上式，各式再分别乘以 $\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}$，并相加，得 $\nabla^2\mathbf{R} = \Delta\mathbf{R}$ 在曲线坐标系中的表达式为

$$\nabla^2\mathbf{R} = \Delta\mathbf{R} = \frac{1}{L_u L_v L_w}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{L_v L_w}{L_u}\frac{\partial\mathbf{R}}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{L_w L_u}{L_v}\frac{\partial\mathbf{R}}{\partial v}\right)\right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{L_u L_v}{L_w}\frac{\partial\mathbf{R}}{\partial w}\right)\right] \tag{4-33}$$

现在我们按第一和第二定义方式来定义表达式 $\nabla\cdot\nabla$ 的含意。根据定义

$$\nabla = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

按第一定义方式，得

$$\nabla\cdot\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial z}$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

(用公式 $\mathbf{A}\cdot\mathbf{A} = A_x A_x + A_y A_y + A_z A_z$)

按第二定义方式，得

$$\nabla\cdot\nabla = \left(\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot\left(\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)$$

$$=\left(\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x}\cdot\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x}+\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x}\cdot\mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y}+\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x}\cdot\mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)+\cdots$$

$$=\left(\mathbf{i}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x}+\mathbf{i}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y}+\mathbf{i}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)+\cdots$$

$$=\mathbf{i}\cdot\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}+\cdots$$

$$=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

由此可见，在直角坐标系中，不论按哪种方式定义，都可得到

$$\nabla\cdot\nabla=\nabla^2=\Delta$$

因为在矢量代数中 $\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}$ 可写成 $\mathbf{A}^2$，所以 $\nabla\cdot\nabla$ 可写成 ∇^2，这就是为什么拉普拉斯算子用 ∇^2 表示的原因。

下面列出几个常用坐标系中的 $\nabla^2\varphi$ 和 $\nabla^2\mathbf{R}$ 表达式供读者查阅用。它们不难通过将有关度量系数代入普遍公式而被推导出来。

(1) 直角坐标系

$$\nabla^2\varphi=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}$$

$$\nabla^2\mathbf{R}=\nabla^2R_x\mathbf{i}+\nabla^2R_y\mathbf{j}+\nabla^2R_z\mathbf{k}\qquad(4\text{-}34)$$

(2) 圆柱坐标系

$$\nabla^2\varphi=\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\phi^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}$$

$$\nabla^2\mathbf{R}=\left(\nabla^2R_r-\frac{R_r}{r^2}-\frac{2}{r^2}\frac{\partial R_\phi}{\partial\phi}\right)\mathbf{e}_r$$

$$+\left(\nabla^2R_\phi-\frac{R_\phi}{r^2}+\frac{2}{r^2}\frac{\partial R_r}{\partial\phi}\right)\mathbf{e}_\phi+(\nabla^2R_z)\mathbf{e}_z\qquad(4\text{-}35)$$

(3) 球坐标系

$$\nabla^2\varphi=\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2}+\frac{\mathrm{ctg}\theta}{r^2}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\phi^2}$$

$$\nabla^2\mathbf{R}=\left(\nabla^2R_r-\frac{2R_r}{r^2}-\frac{2\mathrm{ctg}\theta}{r^2}R_\theta-\frac{2}{r^2}\frac{\partial R_\theta}{\partial\theta}\right.$$

$$\left.-\frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial R_\phi}{\partial\phi}\right)\mathbf{e}_r+\left(\nabla^2R_\theta+\frac{2}{r^2}\frac{\partial R_r}{\partial\theta}-\frac{R_\theta}{r^2\sin^2\theta}\right.$$

$$- \frac{2\cos\theta}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial R_\phi}{\partial\phi}\Big)\mathbf{e}_\theta + \Big(\nabla^2 R_\phi + \frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial R_r}{\partial\phi}$$

$$- \frac{1}{r^2\sin^2\theta} R_\phi + \frac{2\cos\theta}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial R_\theta}{\partial\phi}\Big)\mathbf{e}_\phi \tag{4-36}$$

4-4 ∇ 算符的性质

现在我们根据 $\nabla\cdot\mathbf{R}$, $\nabla\times\mathbf{R}$, ∇f 及 $(\mathbf{a}\cdot\nabla)\mathbf{R}$ 的定义（两种定义方式都可用)来推导∇算符的两条性质。

性质 1 如果将 $\mathbf{R}$ 换成 $\mathbf{R}_1+\mathbf{R}_2$，则

$$\nabla\cdot(\mathbf{R}_1+\mathbf{R}_2) = \nabla\cdot\mathbf{R}_1 + \nabla\cdot\mathbf{R}_2$$
$$\nabla\times(\mathbf{R}_1+\mathbf{R}_2) = \nabla\times\mathbf{R}_1 + \nabla\times\mathbf{R}_2$$
$$(\mathbf{a}\cdot\nabla)(\mathbf{R}_1+\mathbf{R}_2) = (\mathbf{a}\cdot\nabla)\mathbf{R}_1 + (\mathbf{a}\cdot\nabla)\mathbf{R}_2$$
$$\nabla(f_1+f_2) = \nabla f_1 + \nabla f_2$$

证明：从表 1 可以看出，∇与其他函数的结合是微分运算，而和的导数等于导数之和，由此得证。

性质 2 如果将 $\mathbf{R}$ 换成 $R_1\mathbf{R}_2$ 或 $\mathbf{R}_1\times\mathbf{R}_2$，则

$$\nabla\cdot R_1\mathbf{R}_2 = \nabla\cdot(R_{1c}\mathbf{R}_2) + \nabla\cdot(R_1\mathbf{R}_{2c})$$
$$\nabla\cdot(\mathbf{R}_1\times\mathbf{R}_2) = \nabla\cdot(\mathbf{R}_{1c}\times\mathbf{R}_2) + \nabla\cdot(\mathbf{R}_1\times\mathbf{R}_{2c})$$
$$(\mathbf{a}\cdot\nabla)(\mathbf{R}_1\times\mathbf{R}_2) = (\mathbf{a}\cdot\nabla)(\mathbf{R}_{1c}\times\mathbf{R}_2) + (\mathbf{a}\cdot\nabla)(\mathbf{R}_1\times\mathbf{R}_{2c})$$
$$\nabla\times(\mathbf{R}_1\times\mathbf{R}_2) = \nabla\times(\mathbf{R}_{1c}\times\mathbf{R}_2) + \nabla\times(\mathbf{R}_1\times\mathbf{R}_{2c})$$
$$= \cdots$$

式中，R_{1c}, $\mathbf{R}_{1c}$, $\mathbf{R}_{2c}$ 表示 R_1, $\mathbf{R}_1$, $\mathbf{R}_2$ 在微分时（∇ 是微分运算)应视为常数。

用文字来表述的话就是，如果某个含 ∇ 的表达式在∇右边有两个函数的乘积，那末这个表达式可以分成两项，在每一项中右边两个函数中的一个视为常数。

证明：同性质 1 的证明一样，因为∇是微分运算，而我们知道两个函数乘积的导数等于两项之和，在每一项中一个函数视为常数，故有关∇右边有函数乘积的性质得证。

这两个性质可以用来推导一些矢量分析公式，因为是经过证明的性质，所以推导结果肯定正确.

例如:

(1) $\mathrm{grad}(\varphi + \phi) = \nabla(\varphi + \phi) = \nabla\varphi + \nabla\phi$ (4-37)

(2) $\mathrm{grad}(\varphi\phi) = \nabla(\varphi\phi) = \nabla(\varphi_c\phi) + \nabla(\varphi\phi_c)$

$= \varphi_c\nabla\phi + \phi_c\nabla\varphi = \varphi\mathrm{grad}\phi + \phi\mathrm{grad}\varphi$ (4-38)

这里用到了微分学中常系数可以移到微分号之前的性质.

(3) $\mathrm{div}(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \nabla \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \nabla \cdot \mathbf{a} + \nabla \cdot \mathbf{b}$

$= \mathrm{div}\mathbf{a} + \mathrm{div}\mathbf{b}$ (4-39)

(4) $\mathrm{rot}(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \nabla \times (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \nabla \times \mathbf{a} + \nabla \times \mathbf{b}$

$= \mathrm{rot}\mathbf{a} + \mathrm{rot}\mathbf{b}$ (4-40)

(5) $\mathrm{div}(\varphi\mathbf{a}) = \nabla \cdot (\varphi\mathbf{a}) = \nabla \cdot (\varphi_c\mathbf{a}) + \nabla \cdot (\varphi\mathbf{a}_c)$

$= \varphi_c\nabla \cdot \mathbf{a} + \mathbf{a} \cdot \nabla\varphi$

$= \varphi\mathrm{div}\mathbf{a} + \mathbf{a} \cdot \mathrm{grad}\varphi$ (4-41)

(6) $\mathrm{rot}(\varphi\mathbf{a}) = \nabla \times (\varphi\mathbf{a}) = \nabla \times (\varphi_c\mathbf{a}) + \nabla \times (\varphi\mathbf{a}_c)$

$= \varphi_c\nabla \times \mathbf{a} - \mathbf{a}_c \times \nabla\varphi$

$= \varphi\mathrm{rot}\mathbf{a} - \mathbf{a} \times \mathrm{grad}\varphi$

$= \varphi\mathrm{rot}\mathbf{a} + \mathrm{grad}\varphi \times \mathbf{a}$ (4-42)

4-5 ∇ 算符第一定义方式的局限性

我们注意到，上面的叙述过程中，∇ 是在直角坐标中定义的，因为 **i**, **j**, **k** 指的是直角坐标系中沿 x, y, z 轴正方向的单位矢量，而 $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$, $\frac{\partial}{\partial z}$ 指的是对直角坐标 x, y, z 求导数. 通过适当的定义，我们得到

$$\mathrm{grad}f = \nabla f$$
$$\mathrm{div}\mathbf{R} = \nabla \cdot \mathbf{R}$$
$$\mathrm{rot}\mathbf{R} = \nabla \times \mathbf{R}$$

现在我们要问，在正交曲线坐标系中，grad$f$，div$\mathbf{R}$，rot$\mathbf{R}$ 是否也能表示成某一符号矢量与 f 或 $\mathbf{R}$ 在形式上的乘积？换句话说，能否写出一个适合于正交曲线坐标系的符号矢量，并通过利用矢量代数公式形式上的运算（这正是定义的含义）得到 grad$f$，div$\mathbf{R}$，rot$\mathbf{R}$ 在正交曲线坐标系中的表达式？

先写出 grad$f$，div$\mathbf{R}$，rot$\mathbf{R}$ 在正交曲线坐标系中的表达式（见式(3.110)，(3.103)和(3.105))：

$$\mathrm{grad}f=\frac{\mathbf{e}_u}{L_u}\frac{\partial f}{\partial u}+\frac{\mathbf{e}_v}{L_v}\frac{\partial f}{\partial v}+\frac{\mathbf{e}_w}{L_w}\frac{\partial f}{\partial w}$$

$$\mathrm{div}\mathbf{R}=\frac{1}{L_uL_vL_w}\left[\frac{\partial}{\partial u}(L_vL_wR_u)+\frac{\partial}{\partial v}(L_wL_uR_w)+\frac{\partial}{\partial w}(L_uL_vR_w)\right]$$

$$\mathrm{rot}\mathbf{R}=\frac{1}{L_uL_vL_w}\begin{vmatrix}L_u\mathbf{e}_u & L_v\mathbf{e}_v & L_w\mathbf{e}_w\\ \dfrac{\partial}{\partial u} & \dfrac{\partial}{\partial v} & \dfrac{\partial}{\partial w}\\ L_uR_u & L_vR_v & L_wR_w\end{vmatrix}$$

式中，$\mathbf{e}_u$，$\mathbf{e}_v$，$\mathbf{e}_w$ 为沿 u，v，w 坐标线正向的单位矢量，L_u，L_v，L_w 为度量系数。

从grad$f$ 的表达式中可以看出，为了把它表示成 ∇f，∇ 必须具有下列形式：

$$\nabla=\frac{\mathbf{e}_u}{L_u}\frac{\partial}{\partial u}+\frac{\mathbf{e}_v}{L_v}\frac{\partial}{\partial v}+\frac{\mathbf{e}_w}{L_w}\frac{\partial}{\partial w}$$

现在就把正交曲线坐标系中的∇的形式定义为

$$\nabla=\frac{\mathbf{e}_u}{L_u}\frac{\partial}{\partial u}+\frac{\mathbf{e}_v}{L_v}\frac{\partial}{\partial v}+\frac{\mathbf{e}_w}{L_w}\frac{\partial}{\partial w}\tag{4-43}$$

按照第一定义方式

$$\nabla f=\frac{\mathbf{e}_u}{L_u}\frac{\partial f}{\partial u}+\frac{\mathbf{e}_v}{L_v}\frac{\partial f}{\partial v}+\frac{\mathbf{e}_w}{L_w}\frac{\partial f}{\partial w}=\mathrm{grad}f$$

这里用的是矢量代数中的公式：一个矢量和标量的乘积等于这个标量与矢量各分量的乘积之和。

可以看出，grad$f$ 在正交曲线坐标系中的确可以表示成∇和 f 的乘积 ∇f，当然这里∇的意义是

$$\nabla=\frac{\mathbf{e}_u}{L_u}\frac{\partial}{\partial u}+\frac{\mathbf{e}_v}{L_v}\frac{\partial}{\partial v}+\frac{\mathbf{e}_w}{L_w}\frac{\partial}{\partial w}$$

现在来看在正交曲线坐标系中按第一定义方式得出的 $\nabla\cdot\mathbf{R}$ 的含义。按这种定义方式，$\nabla\cdot\mathbf{R}$ 的定义是

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\mathbf{R}&=\left(\frac{\mathbf{e}_u}{L_u}\frac{\partial}{\partial u}+\frac{\mathbf{e}_v}{L_v}\frac{\partial}{\partial v}+\frac{\mathbf{e}_w}{L_w}\frac{\partial}{\partial w}\right)\cdot(\mathbf{e}_uR_u\\&\quad+\mathbf{e}_vR_v+\mathbf{e}_wR_w)\\&=\frac{1}{L_u}\frac{\partial R_u}{\partial u}+\frac{1}{L_v}\frac{\partial R_v}{\partial v}+\frac{1}{L_w}\frac{\partial R_w}{\partial w}\end{aligned}$$

与上列 div$\mathbf{R}$ 在正交曲线坐标系中的表达式相比较，可见按第一定义方式所定义的

$$\nabla\cdot\mathbf{R}\neq\mathrm{div}\mathbf{R}$$

也就是说，如果按第一方式来定义 $\nabla\cdot\mathbf{R}$，那么在正交曲线坐标系中不能用 $\nabla\cdot\mathbf{R}$ 来表示 div$\mathbf{R}$。同样可以看出，如果按第一方式来定义 $\nabla\times\mathbf{R}$，则

$$\nabla\times\mathbf{R}=\begin{vmatrix}\mathbf{e}_u & \mathbf{e}_v & \mathbf{e}_w\\ \frac{1}{L_u}\frac{\partial}{\partial u} & \frac{1}{L_v}\frac{\partial}{\partial v} & \frac{1}{L_w}\frac{\partial}{\partial w}\\ R_u & R_v & R_w\end{vmatrix}$$

与 rot$\mathbf{R}$ 在正交曲线坐标系中的表达式相比，可见按第一方式所定义的

$$\nabla\times\mathbf{R}\neq\mathrm{rot}\mathbf{R}$$

也就是说，如果按第一定义方式来定义 $\nabla\times\mathbf{R}$，那么在正交曲线坐标系中不能用 $\nabla\times\mathbf{R}$ 来表示 rot$\mathbf{R}$。

由此我们可得到下列结论：在正交曲线坐标系中，按第一定义方式，grad$f$ 可以表示成某个∇和 f 的数量积，但 div$\mathbf{R}$ 和 rot$\mathbf{R}$ 却都不能表示成同一个∇和 $\mathbf{R}$ 的形式上的点积和叉积。

目前，由于公认 $\nabla\cdot\mathbf{R}$ 和 $\nabla\times\mathbf{R}$ 不管怎样定义都必须表示

$\mathrm{div}\mathbf{R}$ 和 $\mathrm{rot}\mathbf{R}$，因此第一定义方式仅适用于直角坐标系中，这就是它的局限性。

4-6 ∇ 算符第二定义方式在正交曲线坐标系中的通用性

从上面的情况可以看出，正交曲线坐标系中不存在一个统一的 ∇ 能使 $\nabla f, \nabla\cdot\mathbf{R}$ 和 $\nabla\times\mathbf{R}$ 按第一定义方式分别等于 $\mathrm{grad}f$, $\mathrm{div}\mathbf{R}$ 和 $\mathrm{rot}\mathbf{R}$。

现在再来看一看，是否存在一个统一的 ∇ 能按第二定义方式得到 $\nabla f = \mathrm{grad}f$, $\nabla\cdot\mathbf{R} = \mathrm{div}\mathbf{R}$ 和 $\nabla\times\mathbf{R} = \mathrm{rot}\mathbf{R}$?

仍从 $\mathrm{grad}f$ 的表达式入手。由于

$$\mathrm{grad}f = \frac{\mathbf{e}_u}{L_u}\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\mathbf{e}_v}{L_v}\frac{\partial f}{\partial v} + \frac{\mathbf{e}_w}{L_w}\frac{\partial f}{\partial w}$$

因此 ∇ 必须具有下列形式：

$$\nabla = \frac{\mathbf{e}_u}{L_u}\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\mathbf{e}_v}{L_v}\frac{\partial}{\partial v} + \frac{\mathbf{e}_w}{L_w}\frac{\partial}{\partial w}$$

现在按照第二定义方式来定义 $\nabla\cdot\mathbf{R}$。

(1) 首先写出 ∇ 的展开形式：

$$\nabla = \frac{\mathbf{e}_u}{L_u}\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\mathbf{e}_v}{L_v}\frac{\partial}{\partial v} + \frac{\mathbf{e}_w}{L_w}\frac{\partial}{\partial w}$$

(2) 定义

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\mathbf{R} &= \left(\frac{\mathbf{e}_u}{L_u}\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\mathbf{e}_v}{L_v}\frac{\partial}{\partial v} + \frac{\mathbf{e}_w}{L_w}\frac{\partial}{\partial w}\right)\cdot\mathbf{R} \\ &= \frac{\mathbf{e}_u}{L_u}\frac{\partial}{\partial u}\cdot\mathbf{R} + \frac{\mathbf{e}_v}{L_v}\frac{\partial}{\partial v}\cdot\mathbf{R} \\ &\quad + \frac{\mathbf{e}_w}{L_w}\frac{\partial}{\partial w}\cdot\mathbf{R}\end{aligned}$$

（定义分配律成立）

(3) 定义

$$\nabla \cdot \mathbf{R} = \frac{\mathbf{e}_u}{L_u} \cdot \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial u} + \frac{\mathbf{e}_v}{L_v} \cdot \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial v} + \frac{\mathbf{e}_w}{L_w} \cdot \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial w} \tag{4-44}$$

$\left(定义\ \frac{\partial}{\partial u} \cdot 等的含义为 \cdot \frac{\partial}{\partial u}.\right)$

这就是按第二定义方式 $\nabla \cdot \mathbf{R}$ 在正交曲线坐标系中的含意。问题在于它等不等于 $\mathrm{div}\mathbf{R}$? 回答是肯定的，即按第二定义方式定义时 $\nabla \cdot \mathbf{R} = \mathrm{div}\mathbf{R}$。

为了证明这一点，需要进行一些变换。因为

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial u} &= \frac{\partial}{\partial u}(R_u \mathbf{e}_u + R_v \mathbf{e}_v + R_w \mathbf{e}_w) \\
&= \frac{\partial R_u}{\partial u} \mathbf{e}_u + R_u \frac{\partial \mathbf{e}_u}{\partial u} + \frac{\partial R_v}{\partial u} \mathbf{e}_v + R_v \frac{\partial \mathbf{e}_v}{\partial u} \\
&\quad + \frac{\partial R_w}{\partial u} \mathbf{e}_w + R_w \frac{\partial \mathbf{e}_w}{\partial u}
\end{aligned}$$

所以将单位矢量导数公式(见式(3-85),(3-86)和(3-87))代入上式，得

$$\frac{\mathbf{e}_u}{L_u} \cdot \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial u} = \frac{1}{L_u} \frac{\partial R_u}{\partial u} + \frac{R_v}{L_u L_v} \frac{\partial L_u}{\partial v} + \frac{R_w}{L_u L_w} \frac{\partial L_u}{\partial w} \tag{4-45}$$

用同样方法可得:

$$\frac{\mathbf{e}_v}{L_v} \cdot \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial v} = \frac{1}{L_v} \frac{\partial R_v}{R v} + \frac{R_u}{L_u L_v} \frac{\partial L_v}{\partial u} + \frac{R_w}{L_v L_w} \frac{\partial L_v}{\partial w} \tag{4-46}$$

$$\frac{\mathbf{e}_w}{L_w} \cdot \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial w} = \frac{1}{L_w} \frac{\partial R_w}{\partial w} + \frac{R_u}{L_u L_w} \frac{\partial L_w}{\partial u} + \frac{R_v}{L_v L_w} \frac{\partial L_w}{\partial v} \tag{4-47}$$

将式(4-45),(4-46),(4-47)相加，最后得

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \mathbf{R} &= \frac{1}{L_u} \frac{\partial R_u}{\partial u} + \frac{1}{L_v} \frac{\partial R_v}{\partial v} + \frac{1}{L_w} \frac{\partial R_w}{\partial w} \\
&\quad + R_u \left(\frac{1}{L_u L_v} \frac{\partial L_v}{\partial u} + \frac{1}{L_u L_w} \frac{\partial L_w}{\partial u} \right)
\end{aligned}$$

$$+ R_v\left(\frac{1}{L_vL_w}\frac{\partial L_w}{\partial v}+\frac{1}{L_uL_v}\frac{\partial L_u}{\partial v}\right)$$

$$+ R_w\left(\frac{1}{L_vL_w}\frac{\partial L_v}{\partial w}+\frac{1}{L_uL_w}\frac{\partial L_u}{\partial w}\right)$$

现在将 div **R** 的表达式也进行一些变换。

因为

$$\frac{1}{L_uL_vL_w}\frac{\partial}{\partial u}(L_vL_wR_u)$$

$$=\frac{L_vL_w}{L_uL_vL_w}\frac{\partial R_u}{\partial u}+\frac{L_wR_u}{L_uL_vL_w}\frac{\partial L_v}{\partial u}+\frac{L_vR_u}{L_uL_vL_w}\frac{\partial L_w}{\partial u}$$

$$=\frac{1}{L_u}\frac{\partial R_u}{\partial u}+\frac{R_u}{L_uL_v}\frac{\partial L_v}{\partial u}+\frac{R_u}{L_uL_w}\frac{\partial L_w}{\partial u}$$

同理

$$\frac{1}{L_uL_vL_w}\frac{\partial}{\partial v}(L_uL_wR_v)$$

$$=\frac{1}{L_v}\frac{\partial R_v}{\partial v}+\frac{R_v}{L_uL_v}\frac{\partial L_u}{\partial v}+\frac{R_v}{L_vL_w}\frac{\partial L_w}{\partial v}$$

及

$$\frac{1}{L_uL_vL_w}\frac{\partial}{\partial w}(L_uL_vR_w)$$

$$=\frac{1}{L_w}\frac{\partial R_w}{\partial w}+\frac{R_w}{L_uL_w}\frac{\partial L_u}{\partial w}+\frac{R_w}{L_vL_w}\frac{\partial L_v}{\partial w}$$

将以上三式相加，得

$$\operatorname{div}\mathbf{R}=\frac{1}{L_u}\frac{\partial R_u}{\partial u}+\frac{1}{L_v}\frac{\partial R_v}{\partial v}+\frac{1}{L_w}\frac{\partial R_w}{\partial w}$$

$$+ R_u\left(\frac{1}{L_uL_v}\frac{\partial L_v}{\partial u}+\frac{1}{L_uL_w}\frac{\partial L_w}{\partial u}\right)$$

$$+ R_v\left(\frac{1}{L_vL_w}\frac{\partial L_w}{\partial v}+\frac{1}{L_uL_v}\frac{\partial L_u}{\partial v}\right)$$

$$+ R_w\left(\frac{1}{L_vL_w}\frac{\partial L_v}{\partial w}+\frac{1}{L_uL_w}\frac{\partial L_u}{\partial w}\right)$$

它们与 $\nabla\cdot\mathbf{R}$ 的表达式完全一样，所以按第二方式定义的 $\nabla\cdot\mathbf{R}$

在正交曲线坐标系中仍然等于 div**R**。考察一下 $\nabla\cdot\mathbf{R}$ 按第二定义方式所得的表达式(4-44)，可以看出，实际上我们是把 $\nabla\cdot$ 定义成了一个算子

$$\frac{\mathbf{e}_u}{L_u}\cdot\frac{\partial}{\partial u}+\frac{\mathbf{e}_v}{L_v}\cdot\frac{\partial}{\partial v}+\frac{\mathbf{e}_w}{L_w}\cdot\frac{\partial}{\partial w}$$

因此我们也可以用一个单一的符号来表示。经这个算子和 **R** 作用后得到 div**R**。考虑到历史上它是▽点乘的定义方式，因此 C. T. Tai 建议用▽符号来表示它[1]，并称之为散度算子，即

$$\triangledown=\nabla\cdot$$

这里 $\nabla\cdot$ 应该按第二定义方式来理解。换句话说，算子▽定义为

$$\triangledown=\frac{\mathbf{e}_u}{L_u}\cdot\frac{\partial}{\partial u}+\frac{\mathbf{e}_v}{L_v}\cdot\frac{\partial}{\partial v}+\frac{\mathbf{e}_w}{L_w}\cdot\frac{\partial}{\partial w} \qquad (4\text{-}48)$$

在这个定义之下，

$$\triangledown\mathbf{R}=\mathrm{div}\mathbf{R}=\nabla\cdot\mathbf{R} \quad (\text{第二定义方式})$$

现在我们用同样的定义方式来看看 $\nabla\times\mathbf{R}$ 所表示的意义。

(1) 首先写出∇的展开形式：

$$\nabla=\frac{\mathbf{e}_u}{L_u}\frac{\partial}{\partial u}+\frac{\mathbf{e}_v}{L_v}\frac{\partial}{\partial v}+\frac{\mathbf{e}_w}{L_w}\frac{\partial}{\partial w}$$

(2) 定义

$$\begin{aligned}\nabla\times\mathbf{R}&=\left(\frac{\mathbf{e}_u}{L_u}\frac{\partial}{\partial u}+\frac{\mathbf{e}_v}{L_v}\frac{\partial}{\partial v}+\frac{\mathbf{e}_w}{L_w}\frac{\partial}{\partial w}\right)\times\mathbf{R}\\&=\frac{\mathbf{e}_u}{L_u}\frac{\partial}{\partial u}\times\mathbf{R}+\frac{\mathbf{e}_v}{L_v}\frac{\partial}{\partial v}\times\mathbf{R}+\frac{\mathbf{e}_w}{L_w}\frac{\partial}{\partial w}\times\mathbf{R}\end{aligned}$$

(3) 定义

$$\nabla\times\mathbf{R}=\frac{\mathbf{e}_u}{L_u}\times\frac{\partial\mathbf{R}}{\partial u}+\frac{\mathbf{e}_v}{L_v}\times\frac{\partial\mathbf{R}}{\partial v}+\frac{\mathbf{e}_w}{L_w}\times\frac{\partial\mathbf{R}}{\partial w}$$

即定义$\frac{\partial}{\partial u}\times$等的含义为$\times\frac{\partial}{\partial u}$。

问题是，这样定义的 $\nabla\times\mathbf{R}$ 在正交曲线坐标系中是否等于 rot**R**？回答也是肯定的。证明方法与证明 $\nabla\cdot\mathbf{R}=\mathrm{div}\mathbf{R}$ 的完全

一样，这里就不再重复了。由此可见，在正交曲线坐标系中，按第二方式定义的 $\nabla\times\mathbf{R}$ 等于 $\mathrm{rot}\mathbf{R}$。

和 $\nabla\cdot\mathbf{R}$ 的情况一样，实际上我们是把 $\nabla\times$ 定义成了一个算子

$$\frac{\mathbf{e}_u}{L_u}\times\frac{\partial}{\partial u}+\frac{\mathbf{e}_v}{L_v}\times\frac{\partial}{\partial v}+\frac{\mathbf{e}_w}{L_w}\times\frac{\partial}{\partial w} \tag{4-49}$$

当然，我们可以用一个单一的符号来表示这个算子。考虑到历史上它是 $\nabla\times$ 的第二定义方式(在正交曲线坐标中)，因此 C. T. Tai[1] 建议用 $\nabla\!\!\!\!\!\times$ 符号来表示这个算子，并称之为旋度算子，即

$$\nabla\!\!\!\!\!\times=\nabla\times$$

这里 $\nabla\times$ 应按第二定义方式来理解。换句话说，算子 $\nabla\!\!\!\!\!\times$ 定义为

$$\nabla\!\!\!\!\!\times=\frac{\mathbf{e}_u}{L_u}\times\frac{\partial}{\partial u}+\frac{\mathbf{e}_v}{L_v}\frac{\partial}{\partial v}+\frac{\mathbf{e}_w}{L_w}\frac{\partial}{\partial w} \tag{4-50}$$

在这个定义之下，

$$\nabla\!\!\!\!\!\times\mathbf{R}=\mathrm{rot}\mathbf{R}=\nabla\times\mathbf{R}\ (\text{第二定义方式})$$

显然，按第二定义方式

$$(\mathbf{a}\cdot\nabla)\mathbf{b}=\left[\mathbf{a}\cdot\left(\frac{\mathbf{e}_u}{L_u}\frac{\partial}{\partial u}+\frac{\mathbf{e}_v}{L_v}\frac{\partial}{\partial v}+\frac{\mathbf{e}_w}{L_w}\frac{\partial}{\partial w}\right)\right]\mathbf{b}$$

$$=\frac{a_u}{L_u}\frac{\partial\mathbf{b}}{\partial u}+\frac{a_v}{L_v}\frac{\partial\mathbf{b}}{\partial v}+\frac{a_w}{L_w}\frac{\partial\mathbf{b}}{\partial w}$$

它与式(3-116)完全一致。

总而言之，如果令

$$\nabla=\frac{\mathbf{e}_u}{L_u}\frac{\partial}{\partial u}+\frac{\mathbf{e}_v}{L_v}\frac{\partial}{\partial v}+\frac{\mathbf{e}_w}{L_w}\frac{\partial}{\partial w}$$

并定义 $\frac{1}{L_u}\frac{\partial}{\partial u}\cdot$ 或 $\frac{1}{L_u}\frac{\partial}{\partial u}\times$ 的意义为 $\frac{1}{L_u}\cdot\frac{\partial}{\partial u}$ 或 $\frac{1}{L_u}\times\frac{\partial}{\partial u}$，依次类推，则按这种定义方式

$$\nabla f=\mathrm{grad}\,f$$

$$\nabla\cdot\mathbf{R}=\mathrm{div}\mathbf{R}$$

$$\nabla\times\mathbf{R}=\mathrm{rot}\mathbf{R}$$

$(\mathbf{a}\cdot\nabla)\mathbf{b}=\mathbf{b}$ 在 $\mathbf{a}$ 方向上的导数乘以 $\mathbf{a}$ 的幅值。

也就是说，正交曲线坐标系中第二定义方式的定义结果与直角坐标系中第二定义方式的定义结果是一样的。这就是第二定义方式的通用性，即第二定义方式不但可用于直角坐标系，而且可用于正交曲线坐标系。而对第一定义方式来讲，在直角坐标系中 $\nabla f=\mathrm{grad}f$，$\nabla\cdot\mathbf{R}=\mathrm{div}\mathbf{R}$，$\nabla\times\mathbf{R}=\mathrm{rot}\mathbf{R}$，但在正交曲线坐标系中 $\nabla f=\mathrm{grad}f$，$\nabla\cdot\mathbf{R}\neq\mathrm{div}\mathbf{R}$ $\nabla\times\mathbf{R}\neq\mathrm{rot}\mathbf{R}$，因此第一定义方式只能用于直角坐标系。在正交曲线坐标系中，由于定义结果与直角坐标系中不一样，因此虽然从数学上来说没有什么不对的地方，但是由于意义上的不一致，故没有实用价值。

4-7 ∇ 算符的用途

下文将证明，∇算符在其现有意义的限制条件下，形成符号运算法是不可能的。那么，这个算符有什么用处呢？我们认为，∇算符最主要的用途是，可以方便地记忆或写出 $\mathrm{grad}f$，$\mathrm{div}\mathbf{R}$，$\mathrm{rot}\,\mathbf{R}$ 和 $(\mathbf{a}\cdot\nabla)\mathbf{b}$ 等在直角坐标系或正交曲线坐标系中的表达式。也就是说，在一时想不起它们表达式的情况下，只要记住

$$\nabla=\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x}+\mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y}+\mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

并用矢量代数中关于数量积、点积和叉积的公式就可以很快地写出 $\mathrm{grad}f$，$\mathrm{div}\,\mathbf{R}$，$\mathrm{rot}\,\mathbf{R}$ 和 $(\mathbf{a}\cdot\nabla)\mathbf{b}$ 的表达式。

例如，将标量函数 f 和∇分量 $\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x}$ 等按一定的顺序进行标量积（∇ 的分量放在前面），就能得到

$$\nabla f=\mathbf{i}\frac{\partial f}{\partial x}+\mathbf{j}\frac{\partial f}{\partial y}+\mathbf{k}\frac{\partial f}{\partial z}$$

这就是 $\mathrm{grad}\,f$ 在直角坐标系中的表达式。

将矢量函数 $\mathbf{R}$ 和∇进行“点积”（∇ 放在前面）并利用矢量代数中关于点积的公式

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z$$

就能得到

$$\nabla \cdot \mathbf{R} = \frac{\partial R_x}{\partial x} + \frac{\partial R_y}{\partial y} + \frac{\partial R_z}{\partial z}$$

这就是 $\operatorname{div} \mathbf{R}$ 在直角坐标系中的表达式。

将矢量函数 $\mathbf{R}$ 和∇进行叉积（∇ 放在前面）并利用矢量代数中关于叉积的公式

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

就能得到

$$\nabla \times \mathbf{R} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ R_x & R_y & R_z \end{vmatrix}$$

$$= \mathbf{i}\left(\frac{\partial R_z}{\partial y} - \frac{\partial R_y}{\partial z}\right) + \mathbf{j}\left(\frac{\partial R_x}{\partial z} - \frac{\partial R_z}{\partial x}\right) + \mathbf{k}\left(\frac{\partial R_y}{\partial x} - \frac{\partial R_x}{\partial y}\right)$$

这就是 $\operatorname{rot} \mathbf{R}$ 在直角坐标系中的表达式。

将算符

$$(\mathbf{a} \cdot \nabla) = a_x \frac{\partial}{\partial x} + a_y \frac{\partial}{\partial y} + a_z \frac{\partial}{\partial z}$$

乘以矢量函数 $\mathbf{R}$，得

$$(\mathbf{a} \cdot \nabla)\mathbf{R} = a_x \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x} + a_y \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial y} + a_z \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial z}$$

这就是 $\mathbf{R}$ 在 $\mathbf{a}$ 方向上的导数乘以 $\mathbf{a}$ 的幅值在直角坐标系中的表达式。

可见，用算符∇来写出 $\operatorname{grad} f$，$\operatorname{div} \mathbf{R}$，$\operatorname{rot} \mathbf{R}$ 和 $(\mathbf{a} \cdot \nabla)\mathbf{R}$ 等在直角坐标系中的表达式的确是十分方便的。这也就是为什么符号 ∇f，$\nabla \cdot \mathbf{R}$，$\nabla \times \mathbf{R}$ 和 $(\mathbf{a} \cdot \nabla)\mathbf{b}$ 等能得到广泛应用的原因。当然，符号 $\operatorname{grad} f$，$\operatorname{div} \mathbf{R}$ 和 $\operatorname{rot} \mathbf{R}$ 等同样好用，可是这些符号

(我们称之为文字表达法符号)不能提示如何写出这些函数在直角坐标系中的表达式，而∇则可以。这正是∇算符的优点。

这里我们还要再次强调，根据定义

$$\mathbf{a}\cdot\nabla \neq \nabla\cdot\mathbf{a}$$

$$\mathbf{a}\times\nabla \neq -\nabla\times\mathbf{a}$$

这完全是定义的结果，没有什么不可理解的地方。

要写出 ∇f, $\operatorname{div}\mathbf{R}$, $\operatorname{rot}\mathbf{R}$ 和 $(\mathbf{a}\cdot\nabla)\mathbf{b}$ 等在正交曲线坐标系中的表达式，只需记住

$$\nabla = \frac{\mathbf{e}_u}{L_u}\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\mathbf{e}_v}{L_v}\frac{\partial}{\partial v} + \frac{\mathbf{e}_w}{L_w}\frac{\partial}{\partial w}$$

将相应表达式展开，并交换 $\dfrac{\partial}{\partial u}$ 等与“·”，“×”的位置就行了。例如，

$$\nabla f = \frac{\mathbf{e}_u}{L_u}\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\mathbf{e}_v}{L_v}\frac{\partial f}{\partial v} + \frac{\mathbf{e}_w}{L_w}\frac{\partial f}{\partial w}$$

这就是 $\operatorname{grad} f$ 在正交曲线坐标系中的表达式。

又如

$$\nabla\cdot\mathbf{R} = \frac{\mathbf{e}_u}{L_u}\frac{\partial}{\partial u}\cdot\mathbf{R} + \frac{\mathbf{e}_v}{L_v}\frac{\partial}{\partial v}\cdot\mathbf{R} + \frac{\mathbf{e}_w}{L_w}\frac{\partial}{\partial w}\cdot\mathbf{R}$$

$$= \frac{\mathbf{e}_u}{L_u}\cdot\frac{\partial\mathbf{R}}{\partial u} + \frac{\mathbf{e}_v}{L_v}\cdot\frac{\partial\mathbf{R}}{\partial v} + \frac{\mathbf{e}_w}{L_w}\cdot\frac{\partial\mathbf{R}}{\partial w}$$

这就是 $\operatorname{div}\mathbf{R}$ 在正交曲线坐标系中的表达式。再如

$$\nabla\times\mathbf{R} = \frac{\mathbf{e}_u}{L_u}\frac{\partial}{\partial u}\times\mathbf{R} + \frac{\mathbf{e}_v}{L_v}\frac{\partial}{\partial v}\times\mathbf{R} + \frac{\mathbf{e}_w}{L_w}\frac{\partial}{\partial w}\times\mathbf{R}$$

$$= \frac{\mathbf{e}_u}{L_u}\times\frac{\partial\mathbf{R}}{\partial u} + \frac{\mathbf{e}_v}{L_v}\times\frac{\partial\mathbf{R}}{\partial v} + \frac{\mathbf{e}_w}{L_w}\times\frac{\partial\mathbf{R}}{\partial w}$$

这就是 $\operatorname{rot}\mathbf{R}$ 在正交曲线坐标系中的表达式。最后

$$(\mathbf{a}\cdot\nabla)\mathbf{b} = \frac{a_u}{L_u}\frac{\partial\mathbf{b}}{\partial u} + \frac{a_v}{L_v}\frac{\partial\mathbf{b}}{\partial v} + \frac{a_w}{L_w}\frac{\partial\mathbf{b}}{\partial w}$$

这就是 $\mathbf{b}$ 在 $\mathbf{a}$ 方向上的导数乘以 $\mathbf{a}$ 的幅值在正交曲线坐标系中的表达式。

可见，不论在直角坐标系还是正交曲线坐标系中，利用▽算符都可以很方便地写出 ∇f, $\mathrm{div}\,\mathbf{R}$, $\mathrm{rot}\,\mathbf{R}$ 和 $(\mathbf{a}\cdot\nabla)\mathbf{b}$ 的表达式。

4-8 符号运算法的定义

在绪论中我们已经对符号运算法作过一些简要的说明和历史回顾。从这一节开始我们将认真研究并提出解决符号运算法问题的方法及其有关理论。

首先要明确符号运算法究竟指的是什么。

符号运算法指的是用矢量代数规则或公式对矢量复合函数进行变换的方法；变换过程中的每一步结果，用符号的规定意义来解释都应该是正确的(即等于上一步和下一步)。

下面我们来举例说明这个方法。假定我们想对矢量复合函数 $\mathrm{div}(\mathbf{E}\times\mathbf{H})$ 进行变换，使之等于某些矢量函数(如 $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$, $\mathrm{rot}\mathbf{E}$, $\mathrm{rot}\mathbf{H}$) 的组合，即想通过矢量代数公式对 $\mathrm{div}(\mathbf{E}\times\mathbf{H})$ 进行变换，以获得公式

$$\mathrm{div}(\mathbf{E}\times\mathbf{H})=\mathbf{H}\cdot\mathrm{rot}\mathbf{E}-\mathbf{E}\cdot\mathrm{rot}\mathbf{H}$$

在这个例子中，等式右边的结果是已知的(在很多情况下并不知道该结果)。

第一步：先将 $\mathrm{div}(\mathbf{E}\times\mathbf{H})$ 表示为 $\nabla\cdot(\mathbf{E}\times\mathbf{H})$。这一步是毫无问题的，因为按照 $\nabla\cdot(\mathbf{E}\times\mathbf{H})$ 的定义，它就是 $\mathrm{div}(\mathbf{E}\times\mathbf{H})$。

第二步：根据 $\nabla\cdot(\mathbf{E}\times\mathbf{H})$ 的性质，将它分成两项之和，即

$$\nabla\cdot(\mathbf{E}\times\mathbf{H})=\nabla\cdot(\mathbf{E}_c\times\mathbf{H})+\nabla\cdot(\mathbf{E}\times\mathbf{H}_c)\qquad(4\text{-}51)$$

这里 $\mathbf{E}_c$, $\mathbf{H}_c$ 表示在微分时这些函数应视为常数。这一步也是正确的，因为根据 4-4 节中已经证明的性质 2，如果 ∇ 右边有两个矢量函数的乘积，那么上述表示式可以表示成两部分之和，而且每一部分中的一个函数在微分时视为常数。

第三步：对式(4-51)右边的每一项应用矢量代数公式进行变

换。所用的公式是

$$\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})=\mathbf{B}\cdot(\mathbf{C}\times\mathbf{A})=\mathbf{C}\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B})=-\mathbf{B}\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{C})$$

等等，对 $\nabla\cdot(\mathbf{E}_c\times\mathbf{H})$ 应用公式

$$\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})=-\mathbf{B}\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{C})$$

可把它写成

$$\nabla\cdot(\mathbf{E}_c\times\mathbf{H})=-\mathbf{E}_c\cdot(\nabla\times\mathbf{H})$$

对 $\nabla\cdot(\mathbf{E}\times\mathbf{H}_c)$ 应用公式

$$\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})=\mathbf{C}\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B})$$

可把它写成

$$\nabla\cdot(\mathbf{E}\times\mathbf{H}_c)=\mathbf{H}_c\cdot(\nabla\times\mathbf{E})$$

这样，$\nabla\cdot(\mathbf{E}\times\mathbf{H})$ 就可写成

$$\nabla\cdot(\mathbf{E}\times\mathbf{H})=\mathbf{H}_c\cdot(\nabla\times\mathbf{E})-\mathbf{E}_c\cdot(\nabla\times\mathbf{H})$$

由于 $\mathbf{H}_c$ 和 $\mathbf{E}_c$ 都是微分时视为常数的函数，不受∇作用，而且我们约定：凡是位于∇左边的函数，一律不受∇作用。这样，$\mathbf{H}_c\cdot(\nabla\times\mathbf{E})-\mathbf{E}_c\cdot(\nabla\times\mathbf{H})$ 就可写成

$$\mathbf{H}\cdot(\nabla\times\mathbf{E})-\mathbf{E}\cdot(\nabla\times\mathbf{H})$$

这里很重要的一点就是我们规定了∇只作用于它后面的函数，否则视为常数的脚注就不能省去了。

最后，因 $\nabla\times\mathbf{E}=\mathrm{rot}\mathbf{E}$，$\nabla\times\mathbf{H}=\mathrm{rot}\mathbf{H}$，于是

$$\begin{aligned}\mathrm{div}(\mathbf{E}\times\mathbf{H})&=\nabla\cdot(\mathbf{E}\times\mathbf{H})\\&=\mathbf{H}\cdot(\nabla\times\mathbf{E})-\mathbf{E}\cdot(\nabla\times\mathbf{H})\\&=\mathbf{H}\cdot\mathrm{rot}\mathbf{E}-\mathbf{E}\cdot\mathrm{rot}\mathbf{H}\end{aligned}$$

这正是所需要的结果。

从以上的变换过程中可以看到，由于用了公式 $\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})=-\mathbf{B}\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{C})$ 和 $\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})=\mathbf{C}\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B})$，我们将 $\nabla\cdot(\mathbf{E}_c\times\mathbf{H})$ 变成了 $-\mathbf{E}_c\cdot(\nabla\times\mathbf{H})$，将 $\nabla\cdot(\mathbf{E}\times\mathbf{H}_c)$ 变成了 $\mathbf{H}_c(\cdot(\nabla\times\mathbf{E})$。

但是，根据符号运算法定义，我们也可以用矢量代数公式的其他形式来进行变换而期望得到正确的结果，因为我们没有理由只选择公式的某些形式而不选用公式的其他一些形式、在事先不知

道正确结果的情况下，我们没有选择的依据。

具体地说，如果选用公式 $\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})=\mathbf{B}\cdot(\mathbf{C}\times\mathbf{A})$ 这一形式，那么 $\nabla\cdot(\mathbf{E}_c\times\mathbf{H})$ 就变成了 $\mathbf{E}_c\cdot(\mathbf{H}\times\nabla)$。显然，$\nabla\cdot(\mathbf{E}_c\times\mathbf{H})\neq\mathbf{E}_c\cdot(\mathbf{H}\times\nabla)$，因为左边是一个数，而右边却是一个微分算符。这样，从这个例子中我们可以看出，同样用矢量代数公式进行变换，有时能得到正确的结果，有时却得不到。这个现象我们把它归纳成下列一条定理：

定理 在遵守 ∇ 算符表达式现有约定意义的前提下，用矢量代数公式对含有 ∇ 算符的表达式进行变换时，不可能始终获得正确的结果。

证明：想证明这条定理，只要能举出用矢量代数公式进行变换不能获得正确结果的反例就行了。上面我们已经举出了一个这样的例子。下面再举一些其他的例子。

设有矢量函数 $\mathrm{div}(f\mathbf{R})$。用 ∇ 算符表示就是 $\nabla\cdot(f\mathbf{R})$。根据矢量代数公式

$$\mathbf{A}\cdot(f\mathbf{B})=(\mathbf{A}f)\cdot\mathbf{B}=(f\mathbf{A})\cdot\mathbf{B}$$

我们可以把 $\nabla\cdot(f\mathbf{R})$ 写成

$$\nabla\cdot(f\mathbf{R})=(\nabla f)\cdot\mathbf{R}=(f\nabla)\cdot\mathbf{R}$$

这两个结果都是错的，因为根据现有的约定，$(\nabla f)\cdot\mathbf{R}=\mathrm{grad}f\cdot\mathbf{R}$，$(f\nabla)\cdot\mathbf{R}$ 意味着算符 $f\nabla$ 和 $\mathbf{R}$ 的点乘，从而

$$\begin{aligned}(\nabla f)\cdot\mathbf{R}&=\mathrm{grad}f\cdot\mathbf{R}\\&=\left(\mathbf{i}\frac{\partial f}{\partial x}+\mathbf{j}\frac{\partial f}{\partial y}+\mathbf{k}\frac{\partial f}{\partial z}\right)\cdot\mathbf{R}\\&=\frac{\partial f}{\partial x}R_x+\frac{\partial f}{\partial y}R_y+\frac{\partial f}{\partial z}R_z\end{aligned}\tag{4-52}$$

$$\begin{aligned}(f\nabla)\cdot\mathbf{R}&=f\left(\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x}+\mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y}+\mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot\mathbf{R}\\&=f\frac{\partial R_x}{\partial x}+f\frac{\partial R_y}{\partial y}+f\frac{\partial R_z}{\partial z}\end{aligned}\tag{4-53}$$

可是

$$\nabla \cdot (f\mathbf{R}) = \frac{\partial(fR_x)}{\partial x} + \frac{\partial(fR_y)}{\partial y} + \frac{\partial(fR_z)}{\partial z}$$

$$= f\frac{\partial R_x}{\partial x} + f\frac{\partial R_y}{\partial y} + f\frac{\partial R_z}{\partial z} + R_x\frac{\partial f}{\partial x}$$

$$+ R_y\frac{\partial f}{\partial y} + R_z\frac{\partial f}{\partial z}$$

显然不等于上列式(4-52)和(4-53)。

如果 c 是一个常数，则

$$\nabla \cdot (c\mathbf{R}) = (\nabla c) \cdot \mathbf{R} = 0$$

因为 $\nabla c = 0$。这显然是错误的。如果我们写出

$$\nabla \cdot (c\mathbf{R}) = (c\nabla) \cdot \mathbf{R} = c\nabla \cdot \mathbf{R} = c\mathrm{div}\mathbf{R}$$

这个结果又是对的。

用矢量代数公式(不局限于公式的某些形式)对含有 ∇ 的表达式进行变换，有时能得到正确结果而有时却得不到正确结果这个现象，曾使许多人感到迷惑。于是有人认为[4]，符号运算法是不可靠的，应该选择其他方法，例如利用张量分析的方法来变换矢量函数。这当然是可以的，但是放弃了一种简便的方法。另一些人则认为，只要变换时多加小心，就可以得到正确的结果。可是他们并未指明怎样才算小心，怎样又算不小心，因此运算时仍然没有把握。我们的理解是，所谓小心指的是选择了能得到正确结果的矢量代数公式，而所谓不小心则指的是选择了不能得到正确结果的矢量代数公式。遗憾的是我们没有选择的准则。退一步说，即使有了选择准则，也需要在一般情况下，而不是在具体例子上证明这个准则的正确性。到目前为止，还没有这样的证明。

4-9 ∇ 算符的符号运算法不成功的原因

在这一节中，我们将进一步探讨，对含有 ∇ 算符的表达式用矢量代数公式进行变换为什么有时能得到正确的结果，有时却得到错误的结果。只有弄清了原因，才能针对具体情况采取解决办法，

从而真正解决符号运算法中存在的问题。

我们仍以 $\nabla\cdot(\mathbf{E}_c\times\mathbf{H})$ 为例。按照矢量代数公式，它可以变换成两种形式

$$-\mathbf{E}_c\cdot(\nabla\times\mathbf{H})\ \text{或}\ \mathbf{E}_c\cdot(\mathbf{H}\times\nabla)$$

前一种形式是正确的，因为它等于 $\nabla\cdot(\mathbf{E}_c\times\mathbf{H})$。这可以通过按定义把 $\nabla\cdot(\mathbf{E}_c\times\mathbf{H})$ 和 $-\mathbf{E}_c\cdot(\nabla\times\mathbf{H})$ 展开后再进行比较直接来证明。后一种形式是错的，因为 $\mathbf{H}\times\nabla$ 是一个算符，$\mathbf{E}_c\cdot(\mathbf{H}\times\nabla)$ 仍然是一个算符的形式，不是数，所以不可能等于 $\nabla\cdot(\mathbf{E}_c\times\mathbf{H})$。问题出在哪里呢？显然，对 $\nabla\cdot(\mathbf{E}_c\times\mathbf{H})$ 按照矢量代数公式进行变换或形式上的运算，总是可以的，没有什么限制。这是因为将 ∇ 换成一个矢量 $\mathbf{a}$ 后得到的是矢量代数中有意义的表达式 $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{E}_c\times\mathbf{H})$，当然可以用矢量代数公式将它变形。问题是将 $\nabla\cdot(\mathbf{E}_c\times\mathbf{H})$ 按矢量代数公式变形后它是否还等于原式。我们看到，

$$\nabla\cdot(\mathbf{E}_c\times\mathbf{H})=-\mathbf{E}_c\cdot(\nabla\times\mathbf{H})$$

是因为左右两边分别按 $\nabla\cdot(\mathbf{E}_c\times\mathbf{H})$ 定义和 $\mathbf{E}_c\cdot(\nabla\times\mathbf{H})$ 中 $\nabla\times\mathbf{H}$ 定义再点乘 $\mathbf{E}$ 来理解是相等的，而

$$\nabla\cdot(\mathbf{E}_c\times\mathbf{H})\neq\mathbf{E}_c\cdot(\mathbf{H}\times\nabla)$$

是因为左边规定的意义(一个数)不等于右边所规定的意义(一个算符)。由此可见，对于每一步变换来说，下一步是否等于上一步要受到对 ∇ 算符表达式约定意义的限制，而含有 ∇ 算符表达式的意义是按照一定方式(第一方式或第二方式)规定的。这些定义方式或约定与符号运算法没有必然的联系，因而就不难理解，为什么对每下一步的变换按规定意义来理解时，有时等于上一步，有时却不等于上一步。从第 4-2 节关于含有 ∇ 算符表达式的定义方式中我们可以明显地看出，定义的主要目的在于能表示 $\text{grad}f$，$\text{div}\mathbf{R}$，$\text{rot}\mathbf{R}$ 等函数，根本没有考虑到符号运算法的要求，即用矢量代数公式变形后下一步始终等于上一步，因而变换结果有时对，有时不对就显得很自然了。我们把上面的结果归纳为这样的结论：*过去含有 ∇ 算符表达式的符号运算法，不能始终得到正确结果的原因*

在于受到含有∇算符表达式现有(规定或公认)意义的限制。

4-10 解决符号运算法问题的思路——引入新符号的必要性

从上节的结论中我们看到，利用现有∇算符和已经规定的含义，要建立符号运算法是不可能的。C. T. Tai 指出，出路在于引入新的符号表达式并给于新的定义[1]，使含有新符号的表达式既能表示 grad$f$, div$\mathbf{R}$, rot$\mathbf{R}$ 等函数，又能满足符号运算法要求，即用矢量代数公式进行变换后，每一步结果按新的定义来理解，都等于上一步的意义，而在最后，利用新老符号之间的联系，再回到grad$f$, div$\mathbf{R}$, rot$\mathbf{R}$ 等函数的表达式上来，从而完成变换过程。

首先我们应当看到，引入新符号是为了解决符号运算法问题而必须采取的步骤，决不是数学上的标新立异。过去很多人总想在∇符号基础上和在现有约定意义限制范围内建立符号运算法，虽然尽了很大的努力，但却都没有成功，现在来看失败的原因显然就在于此。

其次，引入新符号比引入∇算符要困难得多，因为新符号及其表达式既要用来表示各种矢量函数，又要经得起用矢量代数公式进行变换后结果不变的“考验”，即数学上应能严格证明的确可以用矢量代数公式进行恒等变换而始终能得到正确的结果。这一补充要求正是符号运算法的核心，是回避不了的。

最后，对新符号还有一个附加要求，即新符号的表达式形式应和现有∇算符表达式形式尽量接近，以便习惯于运用∇算符的人容易接受。C. T. Tai 建议用$\bigtriangledown$这个符号来表示新符号，而且我们希望

$$\bigtriangledown f = \nabla f = \mathrm{grad} f$$

$$\bigtriangledown \cdot \mathbf{R} = \nabla \cdot \mathbf{R} = \mathrm{div}\mathbf{R}$$

$$\bigtriangledown \times \mathbf{R} = \nabla \times \mathbf{R} = \mathrm{rot}\mathbf{R}$$

$$(\mathbf{a}_c \cdot \bigtriangledown)\mathbf{R} = (\mathbf{a} \cdot \nabla)\mathbf{R}$$

式中 $\mathbf{a}_c$ 表示微分时 $\mathbf{a}$ 视为常数。如果能成功，那么就容易记住，并且便于从老符号向新符号过渡。但是，我们不能期望所有含$\triangledown$的表达式都等于含∇的同样形式的表达式。例如，在下文中我们将看到

$$\mathbf{R}\cdot\triangledown \neq \mathbf{R}\cdot\nabla$$
$$\mathbf{R}\times\triangledown \neq \mathbf{R}\times\nabla$$

可是矢量代数公式要求

$$\mathbf{R}\cdot\triangledown = \triangledown\cdot\mathbf{R}$$
$$\mathbf{R}\times\triangledown = -\triangledown\times\mathbf{R}$$

在某些情况下，含$\triangledown$的表达式等于含∇的同样形式表达式，而在另外的情况下则不等，这决非偶然，而是含$\triangledown$表达式其定义不同于含∇表达式之定义的必然结果。我们必须充分认识这一点。如果同样形式的表达式表示同样的意义，那么从上一节的结论中可以看出，要建立符号运算法是不可能的。

4-11　新符号矢量$\triangledown$的引入

从上一节的内容可以看出，引入新符号对建立符号运算法是必要的，含有新符号的表达式其定义要满足下列两点要求：

(1) 应能以简单的形式来表示 $\mathrm{grad}f$, $\mathrm{div}\mathbf{R}$, $\mathrm{rot}\mathbf{R}$ 等现有的函数，而且这些形式应尽可能接近于 ∇f, $\nabla\cdot\mathbf{R}$, $\nabla\times\mathbf{R}$ 等形式。

(2) 应能以矢量代数公式对含有新符号的表达式进行变换，而下一步的结果要始终等于上一步的。

如果能得出一个同时满足以上两项要求的定义来，符号运算法问题也就基本解决了。

首先我们约定，这个新符号用$\triangledown$来表示，因为它形式上和∇很接近，这样对习惯于∇表达式的人来说比较容易接受。

怎样来定义含有$\triangledown$表达式的意义呢？我们可以从经典矢量分析方面关于 $\mathrm{grad}f$, $\mathrm{div}\mathbf{R}$ 和 $\mathrm{rot}\mathbf{R}$ 的表达式中得到启发。

由第二章矢量分析我们知道，在空间的一固定点 P 处，有

$$\mathrm{grad}f = \lim_{V\to 0}\frac{\int_S \mathbf{n}f dS}{V},\quad \mathrm{div}R = \lim_{V\to 0}\frac{\int_S \mathbf{n}\cdot\mathbf{R}dS}{V},$$

$$\mathrm{rot}\mathbf{R} = \lim_{V\to 0}\frac{\int_S \mathbf{n}\times\mathbf{R}dS}{V}$$

式中，S 是包围一含 P 点的小体积 V 的曲面．取对 S 的面积分，再除以体积 V，并取 $V\to 0$ 的极限，就得到了相应的函数．这里 $V\to 0$ 指的是 V 向给定点 P 的收缩，$\mathbf{n}$ 是曲面中小面积元 dS 上朝向外部空间的单位法矢量．

仔细观察一下这些表达式就可以发现，用单位法矢量数乘 f 以后，再取对封闭曲面 S 的积分，同时除以所包的体积 V，并令 $V\to 0$，所得的极限就是 f 在 P 点的梯度 grad$f$．

同样，$\mathbf{R}$ 的散度是用单位法矢量 $\mathbf{n}$ 点乘 $\mathbf{R}$ 后取面积分、除以体积再取极限而得到的．而 $\mathbf{R}$ 的旋度则是用 $\mathbf{n}$ 叉乘 $\mathbf{R}$ 后取面积分、除以体积再取极限的结果．这里要注意的是 $\mathbf{n}$ 和 $\mathbf{R}$ 的顺序，$\mathbf{n}$ 在前，$\mathbf{R}$ 在后．如果把 $\mathbf{R}$ 放在前面，则因为 $\mathbf{R}\times\mathbf{n} = -\mathbf{n}\times\mathbf{R}$，所以尽管我们仍然能得到旋度，但是前面要加负号．

这里的核心部分是单位法矢量 $\mathbf{n}$ 和给定的函数相结合这一步．对应于函数 f 梯度的是数量积 $\mathbf{n}f$，对应于函数 $\mathbf{R}$ 散度的是点积 $\mathbf{n}\cdot\mathbf{R}$，对应于函数 $\mathbf{R}$ 旋度的是叉积 $\mathbf{n}\times\mathbf{R}$或$-\mathbf{R}\times\mathbf{n}$，然后是统一地对封闭曲面 S 取面积分、除以体积 V，并令 $V\to 0$ 这一取极限的过程．

如果我们形象地把将 $\mathbf{n}$ 和函数相结合、取面积分、除以体积再取极限这一过程用符号∇来表示，那么 grad$f$ 就等于 ∇f，div$\mathbf{R}$就等于$\nabla\cdot\mathbf{R}$，rot$\mathbf{R}$ 就等于$\nabla\times\mathbf{R}$ 或$-\mathbf{R}\times\nabla$．也就是说，我们定义

$$\nabla f = \lim_{V\to 0}\frac{\int_S \mathbf{n}f dS}{V} = f\nabla$$

$$\nabla\cdot\mathbf{R} = \lim_{V\to 0}\frac{\int_S \mathbf{n}\cdot\mathbf{R}dS}{V} = \mathbf{R}\cdot\nabla$$

$$\bigtriangledown \times \mathbf{R} = \lim_{V \to 0} \frac{\int_S \mathbf{n} \times \mathbf{R} dS}{V} = -\mathbf{R} \times \bigtriangledown$$

这里要指出两点．首先，我们定义的不是单次而是一个整体的运算过程．其次，在这个定义中，$\bigtriangledown f$ 确实包含有矢量(真正的矢量)乘以 f 的意义，它表现在 $\mathbf{n}f$ 这一步上；$\bigtriangledown \cdot \mathbf{R}$ 的确包含有点乘的意义，它表现在 $\mathbf{n} \cdot \mathbf{R}$ 这一步上 ($\mathbf{R} \cdot \bigtriangledown$ 也一样，只不过是 $\mathbf{n} \cdot \mathbf{R}$ 变成了 $\mathbf{R} \cdot \mathbf{n}$，结果相同)；$\bigtriangledown \times \mathbf{R}$ 的确包含有叉乘的含意，它表现在 $\mathbf{n} \times \mathbf{R}$ 这一步上，所以用 $\bigtriangledown f$ 来表示 grad$f$，用 $\bigtriangledown \cdot \mathbf{R}$ 来表示 div$\mathbf{R}$ 以及用 $\bigtriangledown \times \mathbf{R}$ 来表示 rot$\mathbf{R}$ 是既合理而又自然的．当然这些符号不单单是数乘、点乘或叉乘，在这之后还有求面积分、除以体积和求极限等一系列数学运算，这些都是 ∇f，$\nabla \cdot \mathbf{R}$ 和 $\nabla \times \mathbf{R}$ 定义中所没有的．

$\bigtriangledown f$，$\bigtriangledown \cdot \mathbf{R}$ 和 $\bigtriangledown \times \mathbf{R}$ 的定义，比起 ∇f，$\nabla \cdot \mathbf{R}$ 和 $\nabla \times \mathbf{R}$ 的定义来要复杂得多，但是我们得到的是在定义中只有数学上有严格定义，便于数学推理的一系列运算，从而可以进行数学上的证明，而在 ∇f，$\nabla \cdot \mathbf{R}$ 和 $\nabla \times \mathbf{R}$ 的定义中，由于包含了进行数学上形式上的运算(形式上的数乘、点乘和叉乘)或是说对符号组合 $\frac{\partial}{\partial x} \cdot$ 等于 $\cdot \frac{\partial}{\partial x}$ 的定义，故很难进行数学推理和实现数学证明．例如对符号矢量 $\nabla = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}$ 和函数 $\mathbf{R}$ 的点乘，除了定义它为形式上的点乘结果 $\frac{\partial R_x}{\partial x} + \frac{\partial R_y}{\partial y} + \frac{\partial R_z}{\partial z}$ 外，很难在数学上再进一步加以推理而得出有意义的结论．对于将 $\frac{\partial}{\partial x} \cdot$ 定义为 $\cdot \frac{\partial}{\partial x}$ 来说，情况也一样．在下文中读者将会看到，这一差别是极其关键的．

最后，从 $\bigtriangledown \cdot \mathbf{R} = \mathbf{R} \cdot \bigtriangledown$ 的书写形式来看，我们可以把 $\bigtriangledown$ 看成是数学上的变换符号，即它和 $\mathbf{R}$ 的点乘表示把函数 $\mathbf{R}$ 变换成它的散度，不管 $\mathbf{R}$ 写在它左面还是右面都一样．但是，严格地讲，我

们不能把∇叫作算符，因为对算符数学上有个约定，即它只作用于位于它右边的函数，而不作用于位于它左边的函数。这一点对 $\mathbf{R}\cdot\nabla$ 来说显然是不能满足的。当然，这些只是称呼问题，重要的是定义本身而不是给它以什么称呼。

4-12 $T(\nabla)$ 的一般定义

在对含有∇的表达式进行数学探讨之前，我们先给出对 $T(\nabla)$ 的一般性定义(即 C. T. Tai 定义)。

在矢量代数中存在着各种不同的所谓的乘积，例如，

$$a\mathbf{b},\mathbf{a}\cdot\mathbf{b},\mathbf{a}\times\mathbf{b},c(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}),c(\mathbf{a}\times\mathbf{b}),$$
$$\mathbf{c}\times(\mathbf{a}\times\mathbf{b}),\quad(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{d}) \qquad (4\text{-}54)$$

等等，所有这些表达式在矢量代数中都有明确的意义。这里标量或矢量 $a,\mathbf{a},\mathbf{b},c,\mathbf{c},\mathbf{d}$ 等都假定为位置的函数并认为是彼此不等的。为了便于称呼起见，式(4-54)中所列举的表达式统称为矢量表达式。$\mathbf{ab}$ 这样的表达式不是矢量表达式，因为它在矢量代数中没有意义，但是在并矢代数中它却是一个基本的所谓并矢，对它和其他函数的结合有明确的定义。这里我们仅考虑矢量表达式。并矢表达式在下一章中分析。注意，式(4-54)中的所有表达式对于其中的一个函数来说都是线性的，即若将一个函数换成两个函数之和或乘以系数，则

$$f(\mathbf{a}+\mathbf{b})=f(\mathbf{a})+f(\mathbf{b})$$
$$f(c\mathbf{a})=cf(\mathbf{a})$$

例如，如果 $\mathbf{c}=\mathbf{c}_1+\mathbf{c}_2$，那么，

$$\mathbf{c}\cdot(\mathbf{a}+\mathbf{b})=(\mathbf{c}_1+\mathbf{c}_2)\cdot(\mathbf{a}+\mathbf{b})$$
$$=\mathbf{c}_1\cdot(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c}_2\cdot(\mathbf{a}+\mathbf{b})$$

并且当 $\mathbf{c}=\alpha\mathbf{c}_1$ 时，

$$(\alpha\mathbf{c}_1)\cdot(\mathbf{a}+\mathbf{b})=\alpha[\mathbf{c}_1\cdot(\mathbf{a}+\mathbf{b})]$$

下面我们来列举几个矢量代数中的重要恒等式(证明见第一章)

$$a\mathbf{b} = \mathbf{b}a$$
$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$$
$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$$
$$\mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \cdots$$
$$\mathbf{c} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (\mathbf{c} \cdot \mathbf{b})\mathbf{a} - (\mathbf{c} \cdot \mathbf{a})\mathbf{b}$$

现在，如果式(4-54)的表达式中的某一个矢量用∇这个符号来取代，那么就可得到形如

$$a\nabla, \nabla \cdot \mathbf{b}, \mathbf{a} \cdot \nabla, \nabla \times \mathbf{b}, \mathbf{a} \times \nabla,$$
$$c\nabla \cdot \mathbf{b}, c\mathbf{a} \cdot \nabla, \mathbf{c} \cdot (\nabla \times \mathbf{b})$$

等等含有∇的表达式．这些表达式我们统称之为符号表达式．称“∇”为符号矢量．除了∇之外，符号表达式中一定还有或是标量或是矢量的其他函数或常数．例如 $c(\nabla \times \mathbf{b})$ 中含有一个标量、一个矢量和一个符号矢量．一般，符号矢量表达式用 $T(\nabla)$表示，或者，更详细一些，例如要明确地指出表达式中所含函数的话，那就用

$$T(\nabla, f_1, f_2, \cdots, f_N)$$

来表示．这些函数可以是标量函数、矢量函数或者它们的组合．对 $T(\nabla)$ 的唯一要求在于它对∇是线性的，并能在将∇换成矢量后得到在矢量代数中有意义的表达式．

精确地说，所谓线性 $T(\nabla)$，指的是若在 $T(\nabla)$ 中将∇换成两个矢量之和，即 $\alpha_1\mathbf{P}_1 + \alpha_2\mathbf{P}_2$（其中 α_1 和 α_2 为常数，$\mathbf{P}_1$ 和 $\mathbf{P}_2$ 为任意两矢量），则

$$T(\alpha_1\mathbf{P}_1 + \alpha_2\mathbf{P}_2) = \alpha_1 T(\mathbf{P}_1) + \alpha_2 T(\mathbf{P}_2)$$

另外，线性还要求将∇换成 $\alpha\mathbf{P}$ 时

$$T(\alpha\mathbf{P}) = \alpha T(\mathbf{P})$$

这是和分析中线性函数定义不一样的地方．但是和泛函分析中线性算子的定义是一致的．

现在我们来给出 $T(\nabla)$ 含义的定义．$T(\nabla)$定义为

$$T(\nabla) = \frac{\int_S T(\mathbf{n})dS}{V} \tag{4-55}$$

式中 dS 表示一封闭曲面上的面积单元，V 表示 S 所包体积，$V \to 0$ 表示 V 向空间一定点 P 收缩，$\mathbf{n}$ 表示 dS 上朝向 V 外部的单位法矢量。$T(\mathbf{n})$为 $T(\bigtriangledown)$ 中将$\bigtriangledown$换成 $\mathbf{n}$ 后的表达式。假定 $T(\bigtriangledown)$ 中所有函数都具有一阶以上连续导数。下面举几个例子来说明某些线性 $T(\bigtriangledown)$ 的含意。

例 1 试说明 $T(\bigtriangledown) = \bigtriangledown f$ 的含意，式中 f 为某标量场。

先验证 $T(\bigtriangledown)$ 的线性：由于

$$\begin{aligned} T(\alpha_1\mathbf{P}_1 + \alpha_2\mathbf{P}_2) &= (\alpha_1\mathbf{P}_1 + \alpha_2\mathbf{P}_2)f \\ &= \alpha_1\mathbf{P}_1 f + \alpha_2\mathbf{P}_2 f \\ &= \alpha_1 T(\mathbf{P}_1) + \alpha_2 T(\mathbf{P}_2) \end{aligned}$$

故 $T(\bigtriangledown) = \bigtriangledown f$ 为线性。按照定义

$$T(\bigtriangledown) = \lim_{V\to 0}\frac{\int_S \mathbf{n} f dS}{V} = \mathrm{grad} f = \nabla f$$

由此可见

$$\boxed{\bigtriangledown f = \nabla f} \tag{4-56}$$

另外

$$f\bigtriangledown = \lim_{V\to 0}\frac{\int_S f\mathbf{n} dS}{V} = \lim_{V\to 0}\frac{\int_S \mathbf{n} f dS}{V} = \bigtriangledown f$$

例 2 试说明 $T(\bigtriangledown) = \bigtriangledown \cdot \mathbf{R}$ 的含义，式中 $\mathbf{R}$ 为某矢量场。

先验证 $T(\bigtriangledown)$ 的线性：由于

$$\begin{aligned} T(\alpha_1\mathbf{P}_1 + \alpha_2\mathbf{P}_2) &= (\alpha_1\mathbf{P}_1 + \alpha_2\mathbf{P}_2)\cdot\mathbf{R} \\ &= \alpha_1(\mathbf{P}_1\cdot\mathbf{R}) + \alpha_2(\mathbf{P}_2\cdot\mathbf{R}) \\ &= \alpha_1 T(\mathbf{P}_1) + \alpha_2 T(\mathbf{P}_2) \end{aligned}$$

故 $T(\bigtriangledown) = \bigtriangledown \cdot \mathbf{R}$ 为线性。按照定义

$$\bigtriangledown \cdot \mathbf{R} = \lim_{V\to 0}\frac{\int_S \mathbf{n}\cdot\mathbf{R} dS}{V} = \mathrm{div}\mathbf{R} = \nabla\cdot\mathbf{R}$$

由此可见

$$\boxed{\bigtriangledown \cdot \mathbf{R} = \nabla \cdot \mathbf{R}} \tag{4-56a}$$

另外

$$\mathbf{R}\cdot\triangledown=\lim_{V\to0}\frac{\int_S \mathbf{R}\cdot\mathbf{n}dS}{V}=\lim_{V\to0}\frac{\int_S \mathbf{n}\cdot\mathbf{R}dS}{V}$$

$$=\triangledown\cdot\mathbf{R}$$

于是，$\triangledown\cdot\mathbf{R}=\mathbf{R}\cdot\triangledown=\mathrm{div}\mathbf{R}=\nabla\cdot\mathbf{R}$ 还可以看出

$$\triangledown\cdot\mathbf{R}\neq\mathbf{R}\cdot\nabla$$

这是因为 $\mathbf{R}\cdot\nabla\neq\nabla\cdot\mathbf{R}=\mathrm{div}\mathbf{R}=\triangledown\cdot\mathbf{R}$

例 3　试说明 $T(\triangledown)=\triangledown\times\mathbf{R}$ 的含意。

先验证 $T(\triangledown)$ 的线性：由于

$$T(\alpha_1\mathbf{P}_1+\alpha_2\mathbf{P}_2)=(\alpha_1\mathbf{P}_1+\alpha_2\mathbf{P}_2)\times\mathbf{R}$$

$$=\alpha_1(\mathbf{P}_1\times\mathbf{R})+\alpha_2(\mathbf{P}_2\times\mathbf{R})$$

$$=\alpha_1T(\mathbf{P}_1)+\alpha_2T(\mathbf{P}_2)$$

故 $T(\triangledown)=\triangledown\times\mathbf{R}$ 为线性。按照定义

$$\triangledown\times\mathbf{R}=\lim_{V\to0}\frac{\int_S \mathbf{n}\times\mathbf{R}dS}{V}=\mathrm{rot}\mathbf{R}=\nabla\times\mathbf{R}$$

由此可见

$$\boxed{\triangledown\times\mathbf{R}=\nabla\times\mathbf{R}}\qquad(4\text{-}57)$$

另外

$$\mathbf{R}\times\triangledown=\lim_{V\to0}\frac{\int_S \mathbf{R}\times\mathbf{n}dS}{V}=-\lim_{V\to0}\frac{\int_S \mathbf{n}\times\mathbf{R}dS}{V}$$

$$=-\triangledown\times\mathbf{R}=-\mathrm{rot}\mathbf{R}=-\nabla\times\mathbf{R}$$

还可看出

$$\triangledown\times\mathbf{R}\neq-\mathbf{R}\times\nabla$$

这是因为

$$-\mathbf{R}\times\nabla\neq\nabla\times\mathbf{R}=\mathrm{rot}\mathbf{R}=\triangledown\times\mathbf{R}$$

例 4　试说明 $T(\triangledown)=(\mathbf{a}_c\cdot\triangledown)\mathbf{b}$ 的含义，式中，$\mathbf{a},\mathbf{b}$ 为两矢量场，且 $\mathbf{a}_c$ 表示在积分时 $\mathbf{a}$ 视为常数。

先验证 $T(\triangledown)$ 的线性：由于

$$T(\alpha_1\mathbf{P}_1+\alpha_2\mathbf{P}_2)=[\mathbf{a}_c\cdot(\alpha_1\mathbf{P}_1+\alpha_2\mathbf{P}_2)]\mathbf{b}$$
$$=\alpha_1(\mathbf{a}_c\cdot\mathbf{P}_1)\mathbf{b}+\alpha_2(\mathbf{a}_c\cdot\mathbf{P}_2)\mathbf{b}$$
$$=\alpha_1T(\mathbf{P}_1)+\alpha_2T(\mathbf{P}_2)$$

故 $T(\triangledown)=(\mathbf{a}_c\cdot\triangledown)\mathbf{b}$ 为线性。按照定义

$$(\mathbf{a}_c\cdot\triangledown)\mathbf{b}=\lim_{V\to 0}\frac{\int_S(\mathbf{a}_c\cdot\mathbf{n})\mathbf{b}dS}{V}$$
$$=(\mathbf{a}\cdot\nabla)\mathbf{b}\qquad(\text{见式}(2\text{-}37))$$

由此可见

$$\boxed{(\mathbf{a}_c\cdot\triangledown)\mathbf{b}=(\mathbf{a}\cdot\nabla)\mathbf{b}}\tag{4-58}$$

式(4-55)~(4-58)是将 $T(\triangledown)$ 和通常使用的场函数联系起来的纽带。它们虽然简单，但却十分重要。

$$\mathrm{grad}f=\nabla f=\triangledown f=f\triangledown$$
$$(\mathbf{a}\cdot\nabla)\mathbf{b}=(\mathbf{a}_c\cdot\triangledown)\mathbf{b}$$
$$\mathrm{div}\mathbf{R}=\nabla\cdot\mathbf{R}=\triangledown\cdot\mathbf{R}=\mathbf{R}\cdot\triangledown\neq\mathbf{R}\cdot\nabla$$
$$\mathrm{rot}\mathbf{R}=\nabla\times\mathbf{R}=\triangledown\times\mathbf{R}=-\mathbf{R}\times\triangledown\neq-\mathbf{R}\times\nabla$$

这些公式的用途是，可以利用它们把通常的场函数表示成某一个 $T(\triangledown)$ 的形式。例如 $\nabla\cdot(\mathbf{E}\times\mathbf{H})$ 可表示成 $\triangledown\cdot(\mathbf{E}\times\mathbf{H})$，然后利用下面将要证明的 $T(\triangledown)$ 的性质，即 $T(\triangledown)$ 的符号运算法，对 $T(\triangledown)$ 进行变换，最后把变换了的结果利用同样的公式再转换回通常的场函数，从而达到变换场函数的目的。这里的符号运算法当然指的是用矢量代数公式对 $T(\triangledown)$ 进行变换的方法。

4-13　$T(\triangledown)$在直角坐标系中的表达式

为了便于分析 $T(\triangledown)$ 的性质，我们在这一节中先推导出 $T(\triangledown)$ 在直角坐标系中的表达式。由于 $T(\triangledown)$ 的定义和坐标系统无关，因而所得结果和具体的直角坐标系统也无关，也就是说，

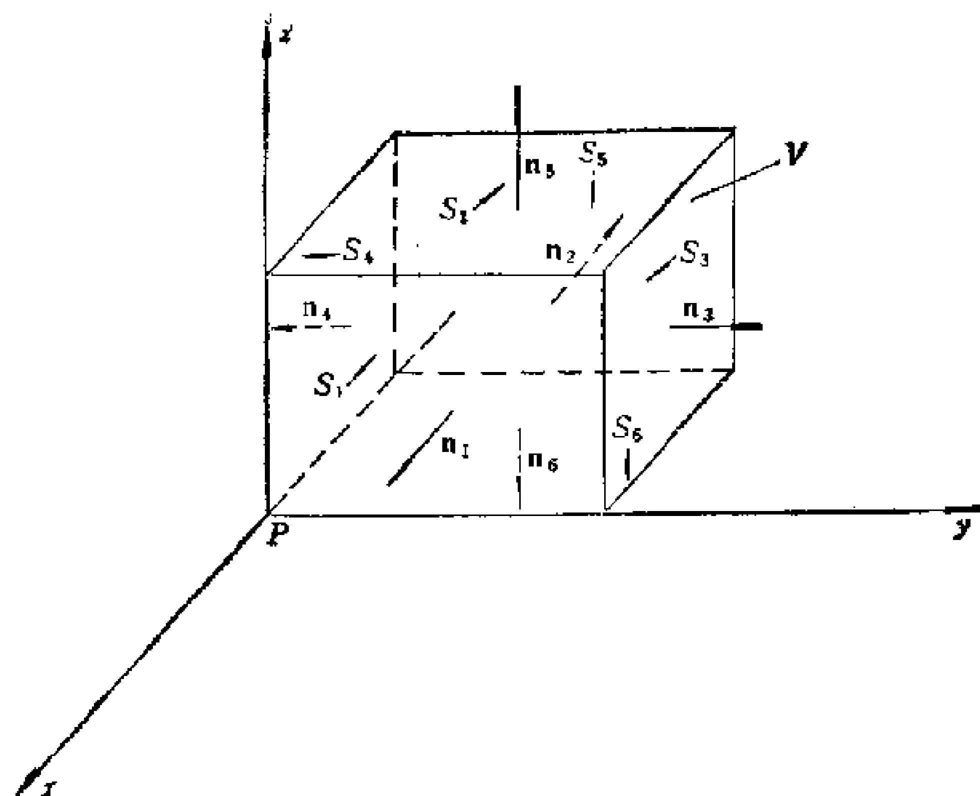


图 4-1 直角坐标系

无论我们选什么样的直角坐标系，所得表达式意义都是一样的。

在某一直角坐标系中，将坐标原点置于P点，并选V为图中所示长方矩形(由积分学我们知道,不论选什么样的V，结果都是一样的),此时各面上的单位矢量都是常矢量,且

$$\mathbf{n}_1 = -\mathbf{n}_2 = \mathbf{i},\ \ \mathbf{n}_3 = -\mathbf{n}_4 = \mathbf{j},\ \ \mathbf{n}_5 = -\mathbf{n}_6 = \mathbf{k}$$

式中,$\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}$分别为沿$x,y,z$轴正向的单位矢量。于是,

$$\begin{aligned}\int_S T(\mathbf{n})dS &= \int_{S_1} + \int_{S_2} + \int_{S_3} + \int_{S_4} + \int_{S_5} + \int_{S_6} \\ &= \int_{S_1} T(\mathbf{i})dS + \int_{S_2} T(-\mathbf{i})dS + \int_{S_3} T(\mathbf{j})dS \\ &\quad + \int_{S_4} T(-\mathbf{j})dS + \int_{S_5} T(\mathbf{k})dS \\ &\quad + \int_{S_6} T(-\mathbf{k})dS\end{aligned}$$

考虑到 $T(\nabla)$ 的线性关系

$$T(-\mathbf{i}) = -T(\mathbf{i})$$

$$T(-\mathbf{j}) = -T(\mathbf{j})$$
$$T(-\mathbf{k}) = -T(\mathbf{k})$$

以及在 S_1, S_2 上 $dS = dydz$, 在 S_3, S_4 上 $dS = dxdz$, 在 S_5, S_6 上 $dS = dxdy$, 于是,

$$\int_{S_1} + \int_{S_2} = \frac{\partial T(\mathbf{i})}{\partial x}\, dxdydz$$

$$\int_{S_3} + \int_{S_4} = \frac{\partial T(\mathbf{j})}{\partial y}\, dxdydz$$

$$\int_{S_5} + \int_{S_6} = \frac{\partial T(\mathbf{k})}{\partial z}\, dxdydz$$

而 $V = dxdydz$

故

$$\lim_{V\to 0}\frac{\int_S T(\mathbf{n})dS}{V} = \frac{\partial T(\mathbf{i})}{\partial x} + \frac{\partial T(\mathbf{j})}{\partial y} + \frac{\partial T(\mathbf{k})}{\partial z}$$

即

$$T(\nabla) = \frac{\partial T(\mathbf{i})}{\partial x} + \frac{\partial T(\mathbf{j})}{\partial y} + \frac{\partial T(\mathbf{k})}{\partial z}$$

这就是 $T(\nabla)$ 在直角坐标系中的表达式.

4-14　$T(\nabla)$的另一定义——希洛夫定义[5]

我们也可以直接在直角坐标系中定义[5]

$$T(\nabla) = \frac{\partial T(\mathbf{i})}{\partial x} + \frac{\partial T(\mathbf{j})}{\partial y} + \frac{\partial T(\mathbf{k})}{\partial z} \qquad (4\text{-}59)$$

这个定义和上一节中的定义(4-55)是等效的，因为从式(4-59)我们可以推导出式(4-55)来. 证明如下:

我们先证明

$$\int_V T(\nabla)dV = \int_S T(\mathbf{n})dS \qquad (4\text{-}60)$$

此公式分三种情况证明. 先假定 $T(\mathbf{n})$ 取标量值，引入矢量函数

$$\mathbf{R} = \mathbf{i}T(\mathbf{i}) + \mathbf{j}T(\mathbf{j}) + \mathbf{k}T(\mathbf{k})$$
$$= \mathbf{i}R_x + \mathbf{j}R_y + \mathbf{k}R_z$$

运用矢量分析中熟知的高斯公式，即

$$\int_V \mathrm{div}\mathbf{R}dV = \int_S \mathbf{R}\cdot\mathbf{n}dS$$

或

$$\int_V \left(\frac{\partial R_x}{\partial x} + \frac{\partial R_y}{\partial y} + \frac{\partial R_z}{\partial z}\right)dV$$
$$= \int_S (R_x\cos\alpha + R_y\cos\beta + R_z\cos\gamma)dS \qquad (4\text{-}61)$$

式中，$\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ 为单位法矢量 $\mathbf{n}$ 的方向余弦。由此得

$$\int_V \left(\frac{\partial T(\mathbf{i})}{\partial x} + \frac{\partial T(\mathbf{j})}{\partial y} + \frac{\partial T(\mathbf{k})}{\partial z}\right)dV$$
$$= \int_S \{T(\mathbf{i})\cos\alpha + T(\mathbf{j})\cos\beta + T(\mathbf{k})\cos\gamma\}dS \quad (4\text{-}62)$$

但

$$\frac{\partial T(\mathbf{i})}{\partial x} + \frac{\partial T(\mathbf{j})}{\partial y} + \frac{\partial T(\mathbf{k})}{\partial z}$$
$$= T(\nabla)$$

$$T(\mathbf{i})\cos\alpha + T(\mathbf{j})\cos\beta + T(\mathbf{k})\cos\gamma$$
$$= T(\mathbf{i}\cos\alpha) + T(\mathbf{j}\cos\beta) + T(\mathbf{k}\cos\gamma)$$
$$= T(\mathbf{i}\cos\alpha + \mathbf{j}\cos\beta + \mathbf{k}\cos\gamma)$$
$$= T(\mathbf{n})$$

这里两次用到了 $T(\nabla)$ 为线性的条件，以及

$$\mathbf{n} = \mathbf{i}\cos\alpha + \mathbf{j}\cos\beta + \mathbf{k}\cos\gamma$$

最后得

$$\int_V T(\nabla)dV = \int_S T(\mathbf{n})dS \qquad (4\text{-}63)$$

现在假定 $T(\mathbf{n})$ 取矢量值。为了明确起见，把它写成 $\mathbf{T}(\mathbf{n})$，将 $\mathbf{T}(\mathbf{n})$ 分解成三个坐标轴上的分量之和，可写出

$$\mathbf{T}(\mathbf{n}) = \mathbf{i}T_1(\mathbf{n}) + \mathbf{j}T_2(\mathbf{n}) + \mathbf{k}T_3(\mathbf{n})$$

式中，$T_1(\mathbf{n}), T_2(\mathbf{n})$ 和 $T_3(\mathbf{n})$ 取标量值。

但上面已经证明:

$$\int_V T_1(\nabla)dV = \int_S T_1(\mathbf{n})dS$$

$$\int_V T_2(\nabla)dV = \int_S T_2(\mathbf{n})dS$$

$$\int_V T_3(\nabla)dV = \int_S T_3(\mathbf{n})dS \tag{4-64}$$

将以上三式分别乘以 $\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}$ 并相加,得

$$\int_V \mathbf{T}(\nabla)dV = \int_S \mathbf{T}(\mathbf{n})dS$$

这是因为

$$\mathbf{i}T_1(\mathbf{n}) + \mathbf{j}T_2(\mathbf{n}) + \mathbf{k}T_3(\mathbf{n}) = \mathbf{T}(\mathbf{n})$$

及

$$\begin{aligned}
&\mathbf{i}T_1(\nabla) + \mathbf{j}T_2(\nabla) + \mathbf{k}T_3(\nabla)\\
&= \mathbf{i}\left\{\frac{\partial}{\partial x}T_1(\mathbf{i}) + \frac{\partial}{\partial y}T_1(\mathbf{j}) + \frac{\partial}{\partial z}T_1(\mathbf{k})\right\}\\
&\quad + \mathbf{j}\left\{\frac{\partial}{\partial x}T_2(\mathbf{i}) + \frac{\partial}{\partial y}T_2(\mathbf{j}) + \frac{\partial}{\partial z}T_2(\mathbf{k})\right\}\\
&\quad + \mathbf{k}\left\{\frac{\partial}{\partial x}T_3(\mathbf{i}) + \frac{\partial}{\partial y}T_3(\mathbf{j}) + \frac{\partial}{\partial z}T_3(\mathbf{k})\right\}\\
&= \frac{\partial}{\partial x}\{\mathbf{i}T_1(\mathbf{i}) + \mathbf{j}T_2(\mathbf{i}) + \mathbf{k}T_3(\mathbf{i})\}\\
&\quad + \frac{\partial}{\partial y}\{\mathbf{i}T_1(\mathbf{j}) + \mathbf{j}T_2(\mathbf{j}) + \mathbf{k}T_3(\mathbf{j})\}\\
&\quad + \frac{\partial}{\partial z}\{\mathbf{i}T_1(\mathbf{k}) + \mathbf{j}T_2(\mathbf{k}) + \mathbf{k}T_3(\mathbf{k})\}\\
&= \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{T}(\mathbf{i}) + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{T}(\mathbf{j}) + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{T}(\mathbf{k})\\
&= \mathbf{T}(\nabla)
\end{aligned} \tag{4-65}$$

这样，我们对两种情况都作了证明。

将等式

$$\int_V T(\nabla)dV = \int_S T(\mathbf{n})dS$$

两边各除以 V，并将体积缩小成点 P，应用中值定理则得

$$\lim_{V\to 0}\frac{1}{V}\int_V T(\nabla)dV = T(\nabla)|_P$$

即 $T(\nabla)$ 在 P 点之值。因此在 P 点

$$T(\nabla) = \lim_{V\to 0}\frac{1}{V}\int_S T(\mathbf{n})dS$$

由一个定义能够推出另一定义这个事实，可以形象地表示如下：

$$\lim_{V\to 0}\frac{\int_S T(\mathbf{n})dS}{V} \Longleftrightarrow \frac{\partial T(\mathbf{i})}{\partial x}+\frac{\partial T(\mathbf{j})}{\partial y}+\frac{\partial T(\mathbf{k})}{\partial z}$$

因此这两种定义是完全等效的。以后在分析 $T(\nabla)$ 的性质时，视情况方便与否，我们将利用

$$T(\nabla) = \lim_{V\to 0}\frac{\int_S T(\mathbf{n})dS}{V}$$

或者

$$T(\nabla) = \frac{\partial T(\mathbf{i})}{\partial x}+\frac{\partial T(\mathbf{j})}{\partial y}+\frac{\partial T(\mathbf{k})}{\partial z}$$

两者中的任意一个，对结果都是毫无影响的。现在根据第二定义来看看

$$(\mathbf{a}_c\cdot\nabla)\mathbf{R}$$

意味着什么。其中 $\mathbf{a}_c$ 表示微分时视为常数的函数。

根据定义

$$\begin{aligned}(a_c\cdot\nabla)\mathbf{R} &= \frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{a}_c\cdot\mathbf{i})\mathbf{R}+\frac{\partial}{\partial y}(\mathbf{a}_c\cdot\mathbf{j})\mathbf{R}\\ &\quad+\frac{\partial}{\partial z}(\mathbf{a}_c\cdot\mathbf{k})\mathbf{R}\\ &=(\mathbf{a}_c\cdot\mathbf{i})\frac{\partial\mathbf{R}}{\partial x}+(\mathbf{a}_c\cdot\mathbf{j})\frac{\partial\mathbf{R}}{\partial y}+(\mathbf{a}_c\cdot\mathbf{k})\frac{\partial\mathbf{R}}{\partial z}\\ &=a_x\frac{\partial\mathbf{R}}{\partial x}+a_y\frac{\partial\mathbf{R}}{\partial y}+a_z\frac{\partial\mathbf{R}}{\partial z}\\ &=(\mathbf{a}\cdot\nabla)\mathbf{R}\end{aligned}$$

$=\mathbf{R}$ 在 $\mathbf{a}$ 方向上的导数乘以 $\mathbf{a}$ 的幅值

由此可见，只要规定 $\mathbf{a}_c$ 表示在积分或微分时视为常数的函数，则不论用哪个定义，

$$(\mathbf{a}_c \cdot \nabla)\mathbf{R} = (\mathbf{a} \cdot \nabla)\mathbf{R}$$

4-15 有关 $T(\nabla)$ 的定理 1——符号运算法的建立

在这一节里我们来证明 $T(\nabla)$ 的这样一条性质，即对任何 $T(\nabla)$ 都可以把 ∇ 看成像普通矢量那样，用矢量代数公式对 $T(\nabla)$ 进行变换且始终能得到正确的结果。由上节的第二定义可见，$T(\nabla)$ 实际上是微分运算，而用矢量代数对 $T(\nabla)$ 进行变换就是用代数运算过程取代微分运算过程，这正是符号运算法的核心。由于这条性质的重要性，我们把它表述成一条定理。

定理 1 对任何 $T(\nabla)$，都可将 ∇ 看作普通矢量用矢量代数公式进行恒等变换，所得结果不变。例如，应用这条定理立即可得：

$$\nabla(\varphi_1 + \varphi_2) = \nabla\varphi_1 + \nabla\varphi_2$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_2) = \nabla \cdot \mathbf{R}_1 + \nabla \cdot \mathbf{R}_2$$

$$\nabla \times (\mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_2) = \nabla \times \mathbf{R}_1 + \nabla \times \mathbf{R}_2$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{R}_1 \times \mathbf{R}_2) = \mathbf{R}_2 \cdot (\nabla \times \mathbf{R}_1) = -\mathbf{R}_1 \cdot (\nabla \times \mathbf{R}_2)$$

证明 1 根据 $T(\nabla)$ 定义，对任何 $T(\nabla)$，将 ∇ 看成普通矢量进行恒等变换意味着在积分号内对 $T(\mathbf{n})$ 进行恒等变换。由于 $T(\mathbf{n})$ 是一个矢量表达式，当然可以用矢量代数公式进行恒等变换而得到形式不同但相等的 $T_1(\mathbf{n})$，而 $T_1(\mathbf{n})$ 对应于

$$T_1(\nabla) = \lim_{V \to 0} \frac{\oint T_1(\mathbf{n})dS}{V}$$

因为

$$T(\mathbf{n}) = T_1(\mathbf{n})$$

所以

$$T_1(\nabla) = \lim_{V\to 0}\frac{\oint_S T(\mathbf{n})dS}{V} = T(\nabla)$$

这就证明了对 $T(\nabla)$ 用矢量代数公式进行恒等变换，得到的另一形式 $T_1(\nabla)$ 等于原先的 $T(\nabla)$.

证明 2 根据 $T(\nabla)$ 的第二定义，对任何 $T(\nabla)$ 将∇看成普通矢量进行恒等变换而得到的另一形式的 $T_1(\nabla)$ 意味着

$$T_1(\mathbf{i}) = T(\mathbf{i})$$
$$T_1(\mathbf{j}) = T(\mathbf{j})$$
$$T_1(\mathbf{k}) = T(\mathbf{k})$$

从而

$$\begin{aligned}
T_1(\nabla) &= \frac{\partial}{\partial x}T_1(\mathbf{i}) + \frac{\partial}{\partial y}T_1(\mathbf{j}) + \frac{\partial}{\partial z}T_1(\mathbf{k}) \\
&= \frac{\partial}{\partial x}T(\mathbf{i}) + \frac{\partial}{\partial y}T(\mathbf{j}) + \frac{\partial}{\partial z}T(\mathbf{k}) \\
&= T(\nabla)
\end{aligned}$$

这条定理的证明虽然简单，但意义重大. 它表明我们所定义的 $T(\nabla)$ 符合符号运算法要求. 之所以能这样，是因为对任何 $T(\nabla)$ 我们都要根据其定义来理解它的含义，而不受任何现有约定(不存在任何约定)的限制. 这正是它和含 $\boldsymbol{\nabla}$ 的表达式所不同的地方. 例如用矢量代数公式得到

$$\nabla\cdot\mathbf{a} = \mathbf{a}\cdot\nabla$$

是定义的结果，而

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{a} \neq \mathbf{a}\cdot\boldsymbol{\nabla}$$

是因为事先已分别定义了 $\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{a}\cdot\boldsymbol{\nabla}$ 的意义，它们是不相等的，从而就不能用矢量代数公式加以变换而得到相等的结果. 而对于 $\nabla\cdot\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{a}\cdot\nabla$，同样按定义来解释，但我们已经证明可以用矢量代数公式进行变换而结果不变，所以 $\nabla\cdot\mathbf{a} = \mathbf{a}\cdot\nabla$ 是很自然的. 又如，

$$\nabla\cdot(\mathbf{E}\times\mathbf{H}) = \mathbf{E}\cdot(\mathbf{H}\times\nabla)$$

是完全正确的. 但是我们不能写成

$$\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = \mathbf{E} \cdot (\mathbf{H} \times \nabla)$$

因为左右两边按规定其意义是不同的。所以我们只能对 $T(\nabla)$ 用矢量代数公式进行变换，并要求每一步都应得到相等或正确的结果，而对含 ∇ 的表达式则不能指望用矢量代数公式进行变换和要求每一步都应得到相等或正确的结果。但是，一旦我们对含有 ∇ 的表达式用某个 $T(\nabla)$ 来取代之后，就可以用矢量代数公式进行变换了。在 $T(\nabla)$ 进行变换之后，对于该变换的最后一步，在可以取代的情况下，再用含 ∇ 的表达式来取代变换后的 $T(\nabla)$，从而达到对含 ∇ 表达式进行变换的目的。

4-16 有关 $T(\nabla)$ 的定理 2——分解法则

在这一节中，我们来研究 $T(\nabla)$ 内含有两个函数乘积的情况。这种情况在有关 $T(\nabla)$ 的各种形式表达式中是经常见到的。具体来说，我们证明下列定理 2。

定理 2 如果在 $T(\nabla)$ 的表达式中有两个函数的乘积（数积、点积或叉积），那么 $T(\nabla)$ 可表示为两项之和。在一项中，一个函数视为常数，不受微分或积分影响（由用哪一种定义而定）；而在另一项中，另一函数视为常数，不受微分或积分影响。

例如，应用定理 2 立即可得

$$\nabla \varphi_1 \varphi_2 = \nabla \varphi_{1c} \varphi_2 + \nabla \varphi_1 \varphi_{2c} = \varphi_{1c} \nabla \varphi_2 + \varphi_{2c} \nabla \varphi_1$$

式中，$\varphi_{1c}, \varphi_{2c}$ 表示 φ_1, φ_2 在微分或积分时视为常数。又如

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \varphi \mathbf{R} &= \nabla \cdot \varphi_c \mathbf{R} + \nabla \cdot \varphi \mathbf{R}_c \\ &= \varphi_c \nabla \cdot \mathbf{R} + \nabla \varphi \cdot \mathbf{R}_c \\ &= \varphi_c \nabla \cdot \mathbf{R} + \mathbf{R}_c \cdot \nabla \varphi \end{aligned}$$

式中，$\varphi_c, \mathbf{R}_c$ 表示 $\varphi, \mathbf{R}$ 在微分或积分时视为常数。同样

$$\begin{aligned} \nabla \times \varphi \mathbf{R} &= \nabla \times \varphi_c \mathbf{R} + \nabla \times \varphi \mathbf{R}_c \\ &= \varphi_c \nabla \times \mathbf{R} + \nabla \varphi \times \mathbf{R}_c \\ &= \varphi_c \nabla \times \mathbf{R} - \mathbf{R}_c \times \nabla \varphi \end{aligned}$$

我们以 $\nabla \cdot (\mathbf{R}_1 \times \mathbf{R}_2)$ 为例来证明定理 2，对其他情况可作

同样的证明。

需要证明：

$$\nabla\cdot(\mathbf{R}_1\times\mathbf{R}_2)=\nabla\cdot(\mathbf{R}_{1c}\times\mathbf{R}_2)+\nabla\cdot(\mathbf{R}_1\times\mathbf{R}_{2c})$$

式中，$\mathbf{R}_{1c},\mathbf{R}_{2c}$ 表示 $\mathbf{R}_1,\mathbf{R}_2$ 在微分或积分时视为常数。

证明：按 $T(\nabla)$ 的第二定义，

$$\begin{aligned}
&\nabla\cdot(\mathbf{R}_1\times\mathbf{R}_2)\\
&=\frac{\partial}{\partial x}[\mathbf{i}\cdot(\mathbf{R}_1\times\mathbf{R}_2)]+\frac{\partial}{\partial y}[\mathbf{j}\cdot(\mathbf{R}_1\times\mathbf{R}_2)]\\
&\quad+\frac{\partial}{\partial z}[\mathbf{k}\cdot(\mathbf{R}_1\times\mathbf{R}_2)]\\
&=\mathbf{i}\cdot\frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{R}_1\times\mathbf{R}_2)+\mathbf{j}\cdot\frac{\partial}{\partial y}(\mathbf{R}_1\times\mathbf{R}_2)\\
&\quad+\mathbf{k}\cdot\frac{\partial}{\partial z}(\mathbf{R}_1\times\mathbf{R}_2)
\end{aligned}$$

由矢量微分学知，

$$\mathbf{i}\cdot\frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{R}_1\times\mathbf{R}_2)=\mathbf{i}\cdot\left(\frac{\partial\mathbf{R}_1}{\partial x}\times\mathbf{R}_2\right)+\mathbf{i}\cdot\left(\mathbf{R}_1\times\frac{\partial\mathbf{R}_2}{\partial x}\right)$$

$$\mathbf{j}\cdot\frac{\partial}{\partial y}(\mathbf{R}_1\times\mathbf{R}_2)=\mathbf{j}\cdot\left(\frac{\partial\mathbf{R}_1}{\partial y}\times\mathbf{R}_2\right)+\mathbf{j}\cdot\left(\mathbf{R}_1\times\frac{\partial\mathbf{R}_2}{\partial y}\right)$$

$$\mathbf{k}\cdot\frac{\partial}{\partial z}(\mathbf{R}_1\times\mathbf{R}_2)=\mathbf{k}\cdot\left(\frac{\partial\mathbf{R}_1}{\partial z}\times\mathbf{R}_2\right)+\mathbf{k}\cdot\left(\mathbf{R}_1\times\frac{\partial\mathbf{R}_2}{\partial z}\right)$$

将三式相加，得

$$\begin{aligned}
&\nabla\cdot(\mathbf{R}_1\times\mathbf{R}_2)\\
&=\left\{\left[\mathbf{i}\cdot\left(\frac{\partial\mathbf{R}_1}{\partial x}\times\mathbf{R}_2\right)\right]+\left[\mathbf{j}\cdot\left(\frac{\partial\mathbf{R}_1}{\partial y}\times\mathbf{R}_2\right)\right]\right.\\
&\quad\left.+\left[\mathbf{k}\cdot\left(\frac{\partial\mathbf{R}_1}{\partial z}\times\mathbf{R}_2\right)\right]\right\}+\left\{\left[\mathbf{i}\cdot\left(\mathbf{R}_1\times\frac{\partial\mathbf{R}_2}{\partial x}\right)\right]\right.\\
&\quad\left.+\left[\mathbf{j}\cdot\left(\mathbf{R}_1\times\frac{\partial\mathbf{R}_2}{\partial y}\right)\right]+\left[\mathbf{k}\cdot\left(\mathbf{R}_1\times\frac{\partial\mathbf{R}_2}{\partial z}\right)\right]\right\}\\
&=\nabla\cdot(\mathbf{R}_{1c}\times\mathbf{R}_2)+\nabla\cdot(\mathbf{R}_1\times\mathbf{R}_{2c})
\end{aligned}$$

此即所需证明的结果。

用数学归纳法很容易将此性质推广到 n 个函数乘积的情况。例如，如果在 $T(\bigtriangledown)$ 中有三个函数的乘积，则 $T(\bigtriangledown)$ 可以分解成三项，每一项中的两个函数在微分时视为常数，只有一个函数被微分。

需要指出，定理 2 和微分学中对多个函数乘积的微分法则是完全一致的。这是因为按 $T(\bigtriangledown)$ 的第二定义，它就是一个微分运算，对它当然适用对函数乘积的微分法则。

另外还要指出，微分时视为常数的函数，在第一定义的积分式中必然也必须视为常数，如果不是这样，那么由第二定义可看出它必然被微分，这与假设不符。反之，根据同样的理由，在积分时视为常数的函数，在微分时必然也必须视为常数。这就是为什么在定理 2中说一个函数视为常数意味着同时不受微分和积分影响的原因。

4-17 有关$T(\bigtriangledown)$的定理 3——有常数项时对 $T(\bigtriangledown)$ 的解释

假定某一个 $T(\bigtriangledown)$ 具有下列形式：

$$T(\bigtriangledown)=\mathbf{a}_c\cdot T_1(\bigtriangledown)=T_1(\bigtriangledown)\cdot\mathbf{a}_c$$

即 $T(\bigtriangledown)$ 可表示成一个常数、常矢量或微分时视为常数或常矢量的函数与另一个 $T_1(\bigtriangledown)$ 的乘积，这里乘积可以是数量积、点积或叉积。我们说，这时 $T(\bigtriangledown)$ 的意义可以解释为看成常矢量的函数与由 $T_1(\bigtriangledown)$ 的定义所决定的函数之乘积，例如

$$\mathbf{E}_c\cdot(\bigtriangledown\times\mathbf{H})=\mathbf{E}\cdot(\nabla\times\mathbf{H})=\mathbf{E}\cdot\mathrm{rot}\mathbf{H}$$

因为 $\mathbf{E}_c$ 是微分时视为常数的矢量函数，$\bigtriangledown\times\mathbf{H}$ 的意义是 $\nabla\times\mathbf{H}$ 或 $\mathrm{rot}\mathbf{H}$。又如，

$$(\bigtriangledown\cdot\mathbf{R})f_c=(\nabla\cdot\mathbf{R})f_c=(\mathrm{div}\mathbf{R})f$$

因为 f_c 是微分时视为常数的函数，所以 $\bigtriangledown\cdot\mathbf{R}=\nabla\cdot\mathbf{R}=\mathrm{div}\mathbf{R}$。类似的例子还可以举出很多。要注意的是

$$(\bigtriangledown\cdot\mathbf{R})f\neq(\mathrm{div}\mathbf{R})f=(\nabla\cdot\mathbf{R})f$$

因为 f 不是常矢量。同理，

$$\mathbf{E}\cdot(\triangledown\times\mathbf{H})\neq\mathbf{E}\cdot\mathrm{rot}\mathbf{H}=\mathbf{E}\cdot(\nabla\times\mathbf{H})$$

因为这里 $\mathbf{E}$ 不是常矢量。

我们把以上的情况归结成如下的一条定理：

定理 3 如果某一个 $T(\triangledown)$ 可表述为另一个 $T_1(\triangledown)$ 与以乘积号(数乘、点乘或叉乘)连结的微分时(积分时)视为常数的函数之乘积，则 $T(\triangledown)$ 就等于这个视为常数的函数与由 $T_1(\triangledown)$ 决定的函数之乘积。

证明：设 $T(\triangledown)=\mathbf{a}_c\cdot T_1(\triangledown)$，根据 $T(\triangledown)$ 的第二定义，

$$T(\triangledown)=\frac{\partial T(\mathbf{i})}{\partial x}+\frac{\partial T(\mathbf{j})}{\partial y}+\frac{\partial T(\mathbf{k})}{\partial z}$$

$$=\frac{\partial\mathbf{a}_c\cdot T_1(\mathbf{i})}{\partial x}+\frac{\partial\mathbf{a}_c\cdot T_2(\mathbf{j})}{\partial y}+\frac{\partial\mathbf{a}_c\cdot T_1(\mathbf{k})}{\partial z}$$

因 $\mathbf{a}_c$ 是微分时视为常数的函数，按照矢量函数微分的法则

$$\frac{\partial\mathbf{a}_c\cdot T_1(\mathbf{i})}{\partial x}=\mathbf{a}_c\cdot\frac{\partial T_1(\mathbf{i})}{\partial x}$$

$$\frac{\partial\mathbf{a}_c\cdot T_1(\mathbf{j})}{\partial y}=\mathbf{a}_c\cdot\frac{\partial T_1(\mathbf{j})}{\partial y}$$

$$\frac{\partial\mathbf{a}_c\cdot T_1(\mathbf{k})}{\partial z}=\mathbf{a}_c\cdot\frac{\partial T_1(\mathbf{k})}{\partial z}$$

故

$$T(\triangledown)=\mathbf{a}_c\cdot\frac{\partial T_1(\mathbf{i})}{\partial x}+\mathbf{a}_c\cdot\frac{\partial T_1(\mathbf{j})}{\partial y}+\bar{a}_c\cdot\frac{\partial T_1(\mathbf{k})}{\partial z}$$

$$=\mathbf{a}_c\cdot\left(\frac{\partial T_1(\mathbf{i})}{\partial x}+\frac{\partial T_1(\mathbf{j})}{\partial y}+\frac{\partial T_1(\mathbf{k})}{\partial z}\right)$$

但括号内的函数正是 $T_1(\triangledown)$ 所定义的函数，因按 $T_1(\triangledown)$ 的第二定义

$$T_1(\triangledown)=\frac{\partial T_1(\mathbf{i})}{\partial x}+\frac{\partial T_1(\mathbf{j})}{\partial y}+\frac{\partial T_1(\mathbf{k})}{\partial z}$$

由此定理得证。

这条定理的用途是它告诉我们在什么样的条件下可以用普通函数来取代含$\triangledown$的表达式。大家知道，普通矢量函数以 $T(\triangledown)$ 表示后就可用矢量代数公式和分解法则对 $T(\triangledown)$ 进行变换，这就是

符号运算法．但变换到最后，总要从 $T(\triangledown)$ 回到普通矢量函数，以达到用符号运算法对矢量函数进行运算的目的．定理 3 告诉我们的正是在什么情况下可以进行回到普通矢量函数的变换．

现在来举一个例子．假定我们要变换 $\nabla\cdot(\mathbf{E}\times\mathbf{H})$．首先，

$$\nabla\cdot(\mathbf{E}\times\mathbf{H})=\triangledown\cdot(\mathbf{E}\times\mathbf{H})$$

根据定理 2，

$$\triangledown\cdot(\mathbf{E}\times\mathbf{H})=\triangledown\cdot(\mathbf{E}_c\times\mathbf{H})+\triangledown\cdot(\mathbf{E}\times\mathbf{H}_c)$$

根据定理 1，

$$\triangledown\cdot(\mathbf{E}_c\times\mathbf{H})=-\mathbf{E}_c\cdot(\triangledown\times\mathbf{H})$$

$$\triangledown\cdot(\mathbf{E}\times\mathbf{H}_c)=\mathbf{H}_c\cdot(\triangledown\times\mathbf{E})$$

当然它们也可以写成其他形式．

根据定理 3，

$$-\mathbf{E}_c\cdot(\triangledown\times\mathbf{H})=-\mathbf{E}\cdot(\nabla\times\mathbf{H})$$

$$\mathbf{H}_c\cdot(\triangledown\times\mathbf{E})=\mathbf{H}\cdot(\nabla\times\mathbf{E})$$

这是因为 $\mathbf{E}_c$,$\mathbf{H}_C$ 都是微分时视为常数的函数，而 $\triangledown\times\mathbf{H}$ 的意义是 $\nabla\times\mathbf{H}$，$\triangledown\times\mathbf{E}$ 的意义是 $\nabla\times\mathbf{E}$．这样，

$$\nabla\cdot(\mathbf{E}\times\mathbf{H})=\mathbf{H}\cdot(\nabla\times\mathbf{E})-\mathbf{E}\cdot(\nabla\times\mathbf{H})$$

这正是我们需要的结果．

我们同样可以把 $\triangledown(\mathbf{E}_c\times\mathbf{H})$ 变换成 $(\triangledown\times\mathbf{E}_c)\cdot\mathbf{H}$．这个结果是完全正确的(定理 1)，但是它不等于 $(\nabla\times\mathbf{E}_c)\cdot\mathbf{H}$，因为 $\mathbf{H}$ 在这里不是视为常数的函数，而定理 3 要求只有 $\mathbf{H}$ 视为常数时才能单独解释 $\triangledown\times\mathbf{E}_c$ 的含义，所以我们不能把 $\triangledown\times\mathbf{E}_c$ 改成 $\nabla\times\mathbf{E}_c$，也就是说完成不了朝普通矢量函数的过渡．但是在 $T(\triangledown)$ 范围内，这个结果是完全正确的，就是说，按 $T(\triangledown)$ 的定义，$\triangledown\cdot(\mathbf{E}_c\times\mathbf{H})$ 与 $(\triangledown\times\mathbf{E}_c)\cdot\mathbf{H}$ 的含意是完全一样的．

4-18　符号运算法的规则

有了 $T(\triangledown)$ 的严格的定义，加上定理 1,2,3，我们就得出了

一整套在矢量分析中进行符号运算的法则。现把它归纳如下：

(1) 利用

$$\bigtriangledown \cdot \mathbf{R} = \nabla \cdot \mathbf{R} = \mathrm{div}\mathbf{R}$$

$$\bigtriangledown f = \nabla f = \mathrm{grad} f$$

$$\bigtriangledown \times \mathbf{R} = \nabla \times \mathbf{R} = \mathrm{rot}\mathbf{R}$$

$$(\mathbf{a}_c \cdot \bigtriangledown)\mathbf{b} = (\mathbf{a} \cdot \nabla)\mathbf{b}$$

某一形式的 $T(\bigtriangledown)$ 来取代需变换的函数。例如用 $\bigtriangledown \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H})$ 取代 $\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H})$。

(2) 利用定理 1 和 2 对 $T(\bigtriangledown)$ 进行变换，一般是先根据定理 2 分解 $T(\bigtriangledown)$，然后再根据定理 1 对分解出来的每一项用矢量代数公式进行变换。

(3) 对上一步中的变换，选取满足定理 3 要求的形式，即尽量把每项都写成某一 $T_1(\bigtriangledown)$ 与微分时视为常数的函数之乘积。

例如先用定理 2 将 $\bigtriangledown \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H})$ 写成

$$\bigtriangledown \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = \bigtriangledown \cdot (\mathbf{E}_c \times \mathbf{H}) + \bigtriangledown \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}_c)$$

再用定理 1，把它们写成

$$-\mathbf{E}_c \cdot (\bigtriangledown \times \mathbf{H}) + \mathbf{H}_c \cdot (\bigtriangledown \times \mathbf{E})$$

这里有意识地选取满足定理 3 的形式。

(4) 根据定理 3，回到普通矢量函数的形式，从而完成对矢量函数的变换。

例如，根据定理 3，

$$-\mathbf{E}_c \cdot (\bigtriangledown \times \mathbf{H}) = -\mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{H})$$

$$\mathbf{H}_c \cdot (\bigtriangledown \times \mathbf{E}) = \mathbf{H} \cdot (\nabla \times \mathbf{E})$$

从而

$$\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = \mathbf{H} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) - \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{H})$$

4-19　赫维赛符号运算法的解释

有了 $T(\bigtriangledown)$ 或符号运算法理论之后，现在我们就可正确解释赫维赛的论述了，从而明白为什么用他的方法能给出正确的结果。

我们并不知道当初赫维赛本人是怎么想的，所以下文中所说的不一定就是他本人的想法，而只是我们的理解。

首先，把 $\operatorname{div}(\mathbf{E}\times\mathbf{H})$ 表示成 $\nabla\cdot(\mathbf{E}\times\mathbf{H})$ 应该理解为把 $\operatorname{div}(\mathbf{E}\times\mathbf{H})$ 表示成 $\bigtriangledown\cdot(\mathbf{E}\times\mathbf{H})$。这当然是可以的，因为按照 $\bigtriangledown\cdot(\mathbf{E}\times\mathbf{H})$ 的定义，即

$$\bigtriangledown\cdot(\mathbf{E}\times\mathbf{H})=\lim_{V\to 0}\frac{\int \mathbf{n}\cdot(\mathbf{E}\times\mathbf{H})dS}{V}$$

它就是 $\operatorname{div}(\mathbf{E}\times\mathbf{H})$。

其次，对他所写的一连串等式

$$\nabla\cdot(\mathbf{E}\times\mathbf{H})=\mathbf{E}\cdot(\mathbf{H}\times\nabla)=\mathbf{H}\cdot(\nabla\times\mathbf{E})$$

应理解为

$$\bigtriangledown\cdot(\mathbf{E}\times\mathbf{H})=\mathbf{E}\cdot(\mathbf{H}\times\bigtriangledown)=\mathbf{H}\cdot(\bigtriangledown\times\mathbf{E})$$

这当然也是正确的，因为按照定理 1，对任何 $T(\bigtriangledown)$ 都可以把$\bigtriangledown$看成像普通矢量那样进行矢量代数运算，而在此情况下得出的结果始终相等。这里用的是公式：

$$\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})=\mathbf{B}\cdot(\mathbf{C}\times\mathbf{A})=\mathbf{C}\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B})$$

然后他说"第一项的意义是毫无含糊之处的"。的确，在对 $T(\bigtriangledown)$ 有了明确的定义之后，$\bigtriangledown\cdot(\mathbf{E}\times\mathbf{H})$ 的意义当然毫无含糊之处，它就是 $\operatorname{div}(\mathbf{E}\times\mathbf{H})$。接下去他又说："但是我们也可用第二项或第三项，条件是∇的微分性质同时对 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{H}$ 起作用。从 $T(\bigtriangledown)$ 理论的观点来看，第二项和第三项都是对第一项用矢量代数公式进行变换的结果，这句话当然是不错的。由于 $T(\bigtriangledown)$ 实际上是微分运算，第二、第三项中 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{H}$ 当然都要被微分，这不是条件，而是定义的必然结果。

再下面一句是"如果我们遵守更常用的约定，即运算对象必须位于算子之后，那在第三项中只有 $\mathbf{E}$ 被微分，于是我们得到结果的一部分"。这句话比较难理解，实际上它指的是如果我们用定理 2 把 $\bigtriangledown\cdot(\mathbf{E}\times\mathbf{H})$ 分成两部分，即

$$\bigtriangledown\cdot(\mathbf{E}\times\mathbf{H})=\bigtriangledown\cdot(\mathbf{E}_c\times\mathbf{H})+\bigtriangledown\cdot(\mathbf{E}\times\mathbf{H}_c)$$

再用矢量代数公式对 $\nabla\cdot(\mathbf{E}\times\mathbf{H}_c)$ 进行变换得到

$$\mathbf{H}_c\cdot(\nabla\times\mathbf{E})$$

这一部分就是赫维赛所说的"第三项中只有 $\mathbf{E}$ 被微分，于是我们得到结果的一部分"。的确，在 $\mathbf{H}_c\cdot(\nabla\times\mathbf{E})$ 这一项中，$\mathbf{H}_c$ 是微分时视为常矢量的函数，只有 $\mathbf{E}$ 被微分。于是根据定理 3 可以用 $\mathbf{H}\cdot(\nabla\times\mathbf{E})$ 来取代 $\mathbf{H}_c\cdot(\nabla\times\mathbf{E})$。

对 $\nabla\cdot(\mathbf{E}_c\times\mathbf{H})$ 用矢量代数公式进行变换后得到 $-\mathbf{E}_c\cdot(\nabla\times\mathbf{H})$ 或 $\mathbf{E}_c\cdot(\mathbf{H}\times\nabla)$。这就是赫维赛所说的"第二项，或与它等效的 $-\mathbf{E}\cdot(\nabla\times\mathbf{H})$ 其中只有 $\mathbf{H}$ 被微分，给出结果的另一部分。"

由此可见，正确的作法是把 $\nabla\cdot(\mathbf{E}\times\mathbf{H})$ 分解成两项(用定理 2)，于是我们就得到赫维赛所说的两部分，在一部分中只有 $\mathbf{E}$ 被微分，而在另一部分中只有 $\mathbf{H}$ 被微分。最后他说"这样我们就得到了完整的、毫不含糊的结果

$$\operatorname{div}(\mathbf{E}\times\mathbf{H})=\mathbf{H}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{E}-\mathbf{E}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{H}\text{"}$$

这句话的意思是根据定理 3 把 $-\mathbf{E}_C\cdot(\nabla\times\mathbf{H})$ 和 $\mathbf{H}_C\cdot(\nabla\times\mathbf{E})$ 变成 $-\mathbf{E}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{H}$ 和 $\mathbf{H}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{E}$。这当然是正确的。于是我们就得到了完整的，毫不含糊的结果

$$\operatorname{div}(\mathbf{E}\times\mathbf{H})=\mathbf{H}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{E}-\mathbf{E}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{H}$$

这句话当然也是正确的。

由上可见，有了 $T(\nabla)$ 的理论，赫维赛的论证就变得可以理解了。一百年前，在没有严格理论指导的情况下，赫维赛就能提出符号运算法并得到正确的结果，确实是件不容易的事。

4-20　柯青符号运算法的解释和证明

在绪论中我们曾提到，苏联数学家柯青曾给出过这样一条运算法则[3]："当除了一个矢量之外，其余的矢量都是常数时，应该这样来变换表达式，以使得所有常矢量都位于∇算子之前，而变矢量则位于它之后。"我们也曾指出，只要按他的规则去做，一定可以

得到正确的结果，但是他并没有给出证明。

现在我们根据上文中所发展的理论先来解释一下他的规则的含意，然后再根据 $T(\triangledown)$ 的理论给予证明，最后加以推广使之成为更便于应用的实用规则。

首先必须牢记，在运用 ∇ 的符号时，有一条约定，即所有位于 ∇ 左边的函数在微分时都应视为常数，不需专门标明视为常数的脚注 c。用通常的话说，就是 ∇ 只作用于它右边的函数，而不作用于它左边的函数。若某些函数已经注明是微分时视为常数的函数，则即使它们位于 ∇ 的右边，也不受 ∇ 的作用，即不被微分，这正是应用 $T(\nabla)$ 的性质 2 时所遇到的情况。柯青所说"当除了一个矢量之外，其余的矢量都是常数时"指的是对任何含有 ∇ 的表达式，位于 ∇ 左边的函数肯定是微分时视为常数的常函数，即不受 ∇ 作用的矢量或标量，而在 ∇ 右边如果有几个函数的乘积，那末需要应用定理 2 把它分成好几项，每一项中除了一个矢量之外，其余的矢量都是视为常数的矢量，这当然是正确的，因为定理 2 是经过证明的，这样就出现了"除了一个矢量之外，其余的矢量都是常数"这种情况。此后，由于在 ∇ 的左边都是视为常数的矢量，因此根据定理 3 我们可以把 ∇ 换成 $\triangledown$，这样就得到了一个 $T(\triangledown)$，于是可用定理 1 以矢量代数公式进行变换，使得所有常矢量都位于 $\triangledown$ 之左边，再用定理 3，回到普通的矢量表达式，即用 ∇ 的矢量表达式，从而完成变换过程。最后所得到的含 ∇ 的表达式，正是柯青所说的"所有常矢量都位于 ∇ 算子之前，而唯一的变矢量则位于它之后"的表达式。根据 $T(\triangledown)$ 的理论，这样的结果肯定是正确的。这样我们就证明了用柯青的规则最后一定能得到正确结果这个结论。至于中间的步骤，实际上是把 ∇ 看成 $\triangledown$ 进行变换，最后再回到 ∇ 的过程，因此只能是一个形式上进行运算的过程，一般情况下不能用含 ∇ 表达式的定义去加以解释，否则很可能得到错误的结果，而如果用 $T(\triangledown)$ 的含意去解释，那每一步肯定都是正确的。

我们来举一个例子加以说明。假定要变换

$$\nabla\cdot(\mathbf{E}\times\mathbf{H})$$

首先用定理 2 把它分成两项，其中每项只有一个函数被微分，另一个则视为常数，即

$$\nabla\cdot(\mathbf{E}\times\mathbf{H})=\nabla\cdot(\mathbf{E}_c\times\mathbf{H})+\nabla\cdot(\mathbf{E}\times\mathbf{H}_c)$$

这时可以把 ∇ 看成 ▽，用矢量代数公式进行变换写出下列结果：

$$\begin{aligned}\nabla\cdot(\mathbf{E}_c\times\mathbf{H})+\nabla\cdot(\mathbf{E}\times\mathbf{H}_c)\\ &=-\mathbf{E}_c\cdot(\nabla\times\mathbf{H})+\mathbf{H}_c\cdot(\nabla\times\mathbf{E})\\ &=+\mathbf{E}_c\cdot(\mathbf{H}\times\nabla)-\mathbf{E}\cdot(\mathbf{H}_c\times\nabla)\end{aligned}$$

从 T(▽) 的观点来看(即把 ∇ 换成▽之后)，这两个结果都是正确的，但如果用含有 ∇ 的表达式的定义来解释，第二个结果显然就是错误的，因为它表示算子，而不是数. 根据柯青规则的要求，需要把常矢量移到 ∇ 之前，变矢量留在它之后，第一个结果符合这个要求. 根据定理3，这里的▽实际上可以换成 ∇，于是我们得到

$$-\mathbf{E}\cdot(\nabla\times\mathbf{H})+\mathbf{H}\cdot(\nabla\times\mathbf{E})$$

这就是所需要的结果，而且肯定是正确的结果.

现在我们把柯青的规则推广如下：

任何一个含有 ∇ 的表达式，都可以将 ∇ 看作普通矢量一样，对这个表达式用矢量代数公式进行恒等变换，但在变换时不可将 ∇ 后面的函数(微分时视为常数的函数例外)搬到 ∇ 前面，因为按约定，变矢量一放在 ∇ 前面就变成了视为常数的矢量，这当然是不能允许的，而在把 ∇ 前面的函数搬到 ∇ 后面时则要注上视为常数的脚注 c. 另外，在 ∇ 一边，如果不全是常矢量或变矢量时，不要按定义加以解释，例如，遇到 $(\nabla f_c)\cdot\mathbf{R}$ 时，不要把它解释为 (∇f_c) 和 $\mathbf{R}$ 的点积(按定理3，这样的解释是错误的)，但是 $f_c\nabla\cdot\mathbf{R}$ 可以解释为 f_c 和 $\nabla\cdot\mathbf{R}$ 的数量积(按定理 3，f_c 是常数时，可以单独解释 $\nabla\cdot R$ 的含意).

通常，采用柯青法则，不必写出▽后再进行运算，可直接得到所需要的结果. 如果认为这种运算没有把握，那就用 T(▽) 来进行运算，最后再回到 $T(\nabla)$，这样不容易出差错. 下面我们将举出一系列运算例题，希望通过实际运算，使读者学会如何用符号运算法来对矢量表达式进行变换.

4-21　辅 助 公 式

在对一系列运算例题进行运算之前，我们先推导出一些辅助公式供需要时查阅用，以免重复推导。

辅助公式 1

$$\operatorname{grad}\varphi(f(r))=\frac{d\varphi}{df}\operatorname{grad}f(r)$$

式中，r 为矢量半径 $\mathbf{r}$ 的幅值，$f(r)$ 为标量函数。

证：

$$\begin{aligned}\operatorname{grad}\varphi(f(r))&=\nabla\varphi(f(r))\\&=\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x}\varphi(f(r))+\mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y}\varphi(f(r))+\mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}\varphi(f(r))\\&=\mathbf{i}\frac{\partial\varphi}{\partial f}\frac{\partial f(r)}{\partial x}+\mathbf{j}\frac{\partial\varphi}{\partial f}\frac{\partial f(r)}{\partial y}+\mathbf{k}\frac{\partial\varphi}{\partial f}\frac{\partial f(r)}{\partial z}\\&=\frac{\partial\varphi}{\partial f}\nabla f(r)\\&=\frac{\partial\varphi}{\partial f}\operatorname{grad}f(r)\end{aligned}$$

辅助公式 2

$$\operatorname{grad}f(r)=f'(r)\operatorname{grad}r$$

证

$$\begin{aligned}\operatorname{grad}f(r)&=\nabla f(r)\\&=\mathbf{i}\frac{\partial f(r)}{\partial x}+\mathbf{j}\frac{\partial f(r)}{\partial y}+\mathbf{k}\frac{\partial f(r)}{\partial z}\\&=f'(r)\mathbf{i}\frac{\partial r}{\partial x}+f'(r)\mathbf{j}\frac{\partial r}{\partial y}+f'(r)\mathbf{k}\frac{\partial r}{\partial z}\\&=f'(r)\nabla r\\&=f'(r)\operatorname{grad}r\end{aligned}$$

辅助公式 3

$$\mathrm{grad}\,r=\frac{\mathbf{r}}{r}\qquad 或 \qquad \nabla r=\frac{\mathbf{r}}{r}$$

证

$$\mathrm{grad}\,r=\nabla r=\mathbf{i}\frac{\partial r}{\partial x}+\mathbf{j}\frac{\partial r}{\partial y}+\mathbf{k}\frac{\partial r}{\partial z}$$

但

$$\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\frac{2x}{2r}=\frac{x}{r}$$

$$\frac{\partial r}{\partial y}=\frac{y}{r}\qquad\qquad \frac{\partial r}{\partial z}=\frac{z}{r}$$

因此

$$\mathrm{grad}\,r=\frac{\mathbf{i}x+\mathbf{j}y+\mathbf{k}z}{r}=\frac{\mathbf{r}}{r}$$

辅助公式 4

$$\mathrm{grad}\,\varphi(f(r))=\frac{\partial\varphi}{\partial f}f'(r)\frac{\mathbf{r}}{r}$$

证：将以上三个公式合并后即得此结果。

辅助公式 5

$$\mathrm{grad}\,\varphi(f(\mathbf{r}))=\frac{d\varphi}{df}\,\mathrm{grad}\,f(\mathbf{r})$$

式中，$\mathbf{r}$ 为自变量，$f(\mathbf{r})$为标量。

证：证明同辅助公式 1。

辅助公式 6

$$(\mathbf{a}\cdot\nabla)\mathbf{r}=\mathbf{a}$$

证

$$\begin{aligned}(\mathbf{a}\cdot\nabla)\mathbf{r}&=a_x\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial x}+a_y\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial y}+a_z\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial z}\\&=a_x\mathbf{i}+a_y\mathbf{j}+a_z\mathbf{k}\\&=\mathbf{a}\end{aligned}$$

辅助公式 7

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{r}=0\qquad 或 \qquad \nabla\times\mathbf{r}=0$$

证

$$
\begin{aligned}
\operatorname{rot}\mathbf{r} &= \nabla \times \mathbf{r} \\
&= \nabla \times \mathbf{r} \\
&= \frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{i} \times \mathbf{r}) + \frac{\partial}{\partial y}(\mathbf{j} \times \mathbf{r}) + \frac{\partial}{\partial z}(\mathbf{k} \times \mathbf{r})
\end{aligned}
$$

因为

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \\
&\mathbf{i} \times \mathbf{r} = y\mathbf{i} \times \mathbf{j} + z\mathbf{i} \times \mathbf{k} = y\mathbf{k} - z\mathbf{j} \\
&\mathbf{j} \times \mathbf{r} = x\mathbf{j} \times \mathbf{i} + z\mathbf{j} \times \mathbf{k} = -x\mathbf{k} + z\mathbf{i} \\
&\mathbf{k} \times \mathbf{r} = x\mathbf{k} \times \mathbf{i} + y\mathbf{k} \times \mathbf{j} = x\mathbf{j} - y\mathbf{i}
\end{aligned}
$$

所以

$$
\begin{aligned}
\operatorname{rot}\mathbf{r} = {} & \frac{\partial}{\partial x}(y\mathbf{k} - z\mathbf{j}) + \frac{\partial}{\partial y}(-x\mathbf{k} + z\mathbf{i}) \\
& + \frac{\partial}{\partial z}(x\mathbf{j} - y\mathbf{i}) = 0
\end{aligned}
$$

辅助公式 8

$$
\operatorname{grad}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}) = \mathbf{a} \qquad \text{或} \ \nabla(\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}) = \mathbf{a}
$$

式中，$\mathbf{a}$ 为常矢量。

证：根据 $\nabla \times \mathbf{r} = 0$ 和 $(\mathbf{a} \cdot \nabla)\mathbf{r} = \mathbf{a}$，

对 $\operatorname{grad}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{r})$ 应用利青法则，得

$$
\begin{aligned}
\operatorname{grad}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}) &= \nabla(\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}) \\
&= \mathbf{a} \times (\nabla \times \mathbf{r}) + (\mathbf{a} \cdot \nabla)\mathbf{r} \\
&= \mathbf{a}
\end{aligned}
$$

这里用到公式

$$
\mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) = \mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) + (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C}
$$

注意，$\mathbf{a}$ 若不是常矢量就得不到上述结果，因为

$$
\begin{aligned}
\nabla(\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}) &= \mathbf{a} \times (\nabla \times \mathbf{r}) + (\mathbf{a} \cdot \nabla)\mathbf{r} \\
&\neq \mathbf{a} \times (\nabla \times \mathbf{r}) + (\mathbf{a} \cdot \nabla)\mathbf{r}
\end{aligned}
$$

辅助公式 9

$$
\operatorname{div}\mathbf{r} = 3 \qquad \text{或} \qquad \nabla \cdot \mathbf{r} = 3
$$

证:

$$\begin{aligned}\operatorname{div}\mathbf{r} &= \nabla\cdot\mathbf{r}\\ &= \frac{\partial x}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial z}\\ &= 3\end{aligned}$$

辅助公式 10

$$\operatorname{div}\mathbf{A}(f(\mathbf{r})) = \frac{d\mathbf{A}}{df}\cdot\operatorname{grad}f(\mathbf{r})$$

式中，$f(\mathbf{r})$ 为标量函数，$\mathbf{A}(f(\mathbf{r}))$ 为矢量函数。

证:

$$\begin{aligned}\operatorname{div}\mathbf{A}(f(\mathbf{r})) &= \nabla\cdot\mathbf{A}(f(\mathbf{r}))\\ &= \nabla\cdot\mathbf{A}(f(\mathbf{r}))\\ &= \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i}\cdot\mathbf{A}+\frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j}\cdot\mathbf{A}+\frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}\cdot\mathbf{A}\\ &= \mathbf{i}\cdot\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial x}+\mathbf{j}\cdot\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial y}+\mathbf{k}\cdot\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial z}\\ &= \mathbf{i}\cdot\frac{d\mathbf{A}}{df}\frac{\partial f}{\partial x}+\mathbf{j}\cdot\frac{d\mathbf{A}}{df}\frac{\partial f}{\partial y}+\mathbf{k}\cdot\frac{d\mathbf{A}}{df}\frac{\partial f}{\partial z}\\ &= \frac{d\mathbf{A}}{df}\cdot\left(\mathbf{i}\frac{\partial f}{\partial x}+\mathbf{j}\frac{\partial f}{\partial y}+\mathbf{k}\frac{\partial f}{\partial z}\right)\\ &= \frac{d\mathbf{A}}{df}\cdot\operatorname{grad}f(\mathbf{r})\end{aligned}$$

辅助公式 11

$$\operatorname{rot}\mathbf{A}(f(\mathbf{r})) = -\frac{d\mathbf{A}}{df}\times\operatorname{grad}f(\mathbf{r})$$

证:

$$\begin{aligned}\operatorname{rot}\mathbf{A}(f(\mathbf{r})) &= \nabla\times\mathbf{A}(f(\mathbf{r}))\\ &= \nabla\times\mathbf{A}(f(\mathbf{r}))\\ &= \frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{i}\times\mathbf{A})+\frac{\partial}{\partial y}(\mathbf{j}\times\mathbf{A})+\frac{\partial}{\partial z}(\mathbf{k}\times\mathbf{A})\end{aligned}$$

$$= \mathbf{i} \times \frac{d\mathbf{A}}{df}\frac{\partial f}{\partial x} + \mathbf{j} \times \frac{d\mathbf{A}}{df}\frac{\partial f}{\partial y} + \mathbf{k} \times \frac{d\mathbf{A}}{df}\frac{\partial f}{\partial z}$$

$$= -\frac{d\mathbf{A}}{df} \times \left(\mathbf{i}\frac{\partial f}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial f}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial f}{\partial z}\right)$$

$$= -\frac{d\mathbf{A}}{df} \times \mathrm{grad} f$$

4-22 运 算 举 例

为了在具体例题上演示如何运用符号运算法来推导矢量恒等式，下面将分门别类地列举一些关系式的证明，以供读者需要时查阅。读者也可先自行推导，以检查运用符号运算法的能力和技巧。

4-22-1 关于 grad 的运算例题

例 1 证明

$$\mathrm{grad}(\varphi\psi) = \varphi\,\mathrm{grad}\psi + \psi\,\mathrm{grad}\varphi$$

证： 用柯青法则，得

$$\begin{aligned}\mathrm{grad}(\varphi\psi) &= \nabla(\varphi\psi)\\ &= \nabla\varphi_c\psi + \nabla\varphi\psi_c\\ &= \varphi_c\nabla\psi + \psi_c\nabla\varphi\\ &= \varphi\,\mathrm{grad}\psi + \psi\,\mathrm{grad}\varphi\end{aligned}$$

例 2 证明

$$\begin{aligned}\mathrm{grad}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}) = (\mathbf{b}\cdot\nabla)\mathbf{a} + (\mathbf{a}\cdot\nabla)\mathbf{b}\\ + \mathbf{b}\times\mathrm{rot}\mathbf{A} + \mathbf{a}\times\mathrm{rot}\mathbf{b}\end{aligned}$$

证：用 $T(\bigtriangledown)$ 理论的定理 1,2,3，得

$$\begin{aligned}\mathrm{grad}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}) &= \nabla(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\\ &= \bigtriangledown(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\\ &= \bigtriangledown(\mathbf{a}_c\cdot\mathbf{b}) + \bigtriangledown(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}_c)\\ &= \mathbf{a}_c\times(\bigtriangledown\times\mathbf{b}) + (\mathbf{a}_c\cdot\bigtriangledown)\mathbf{b}\end{aligned}$$

$$+\mathbf{b}_c\times(\nabla\times\mathbf{a})+(\mathbf{b}_c\cdot\nabla)\mathbf{a}$$

$$=\mathbf{a}\times(\nabla\times\mathbf{b})+(\mathbf{a}\cdot\nabla)\mathbf{b}+\mathbf{b}$$

$$\times(\nabla\times\mathbf{a})+(\mathbf{b}\cdot\nabla)\mathbf{a}$$

$$=(\mathbf{b}\cdot\nabla)\mathbf{a}+(\mathbf{a}\cdot\nabla)\mathbf{b}+\mathbf{b}\times\mathrm{rot}\mathbf{A}$$

$$+\mathbf{a}\times\mathrm{rot}\mathbf{b}$$

此处用到公式

$$\mathbf{B}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C})=\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C})+(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})\mathbf{C}$$

例 3 证明

$$\mathbf{c}\cdot\mathrm{grad}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})=\mathbf{a}\cdot(\mathbf{c}\cdot\nabla)\mathbf{b}+\mathbf{b}\cdot(\mathbf{c}\cdot\nabla)\mathbf{a}$$

证：

$$\mathbf{c}\cdot\mathrm{grad}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})=\mathbf{c}_c\cdot\nabla(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})$$

$$=(\mathbf{c}_c\cdot\nabla)(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})$$

$$=(\mathbf{c}_c\cdot\nabla)(\mathbf{a}_c\cdot\mathbf{b})+(\mathbf{c}_c\cdot\nabla)(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}_c)$$

$$=\mathbf{a}_c\cdot(\mathbf{c}_c\cdot\nabla)\mathbf{b}+\mathbf{b}_c\cdot(\mathbf{c}_c\cdot\nabla)\mathbf{a}$$

$$=\mathbf{a}\cdot(\mathbf{c}\cdot\nabla)\mathbf{b}+\mathbf{b}\cdot(\mathbf{c}\cdot\nabla)\mathbf{a}$$

例 4 证明

$$\mathrm{grad}r^n=nr^{n-2}\mathbf{r}$$

证：

$$\mathrm{grad}r^n=\frac{dr^n}{dr}\mathrm{grad}r$$

$$=nr^{n-1}\frac{\mathbf{r}}{r}$$

$$=nr^{n-2}\mathbf{r}$$

例 5 证明

$$\mathrm{grad}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{r}\varphi(r))=\mathbf{a}\varphi(r)+(\mathbf{a}\cdot\mathbf{r})\frac{\mathbf{r}\varphi'(r)}{r}$$

式中，$\mathbf{a}$ 为常矢量.

证：用柯青规则，得

$$\mathrm{grad}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{r}\varphi(r))$$

$$=\nabla(\mathbf{a}\cdot\mathbf{r}\varphi(r))$$

$$= \nabla((\mathbf{a}\cdot\mathbf{r})_c\varphi(r)) + \nabla((\mathbf{a}\cdot\mathbf{r})\varphi(r)_c)$$

$$= (\mathbf{a}\cdot\mathbf{r})_c\nabla\varphi(r) + \varphi(r)_c\nabla(\mathbf{a}\cdot\mathbf{r})$$

$$= (\mathbf{a}\cdot r)\varphi'(r)\frac{\mathbf{r}}{r} + \varphi(r)\mathbf{a}$$

$$= \mathbf{a}\varphi(r) + (\mathbf{a}\cdot\mathbf{r})\frac{\mathbf{r}}{r}\varphi'(r)$$

（用辅助公式 8，2 和 3）

例 6 设 $\varphi = \mathbf{a}\cdot\mathbf{P}$，$\mathbf{a}$ = 常矢量，求 $\mathrm{grad}\varphi$。

解：

$$\begin{aligned}\mathrm{grad}\varphi &= \nabla(\mathbf{a}\cdot\mathbf{P})\\ &= \mathbf{a}\times(\nabla\times\mathbf{P}) + (\mathbf{a}\cdot\nabla)\mathbf{P}\\ &= \mathbf{a}\times\mathrm{rot}\mathbf{P} + (\mathbf{a}\cdot\nabla)\mathbf{P}\end{aligned}$$

例 7 证明

$$\mathrm{grad}\frac{\mathbf{P}^2}{2} = \mathbf{P}\times\mathrm{rot}\mathbf{P} + (\mathbf{P}\cdot\nabla)\mathbf{P}$$

证：

$$\begin{aligned}\mathrm{grad}\frac{\mathbf{P}^2}{2} &= \frac{1}{2}\mathrm{grad}\mathbf{P}\cdot\mathbf{P}\\ &= \frac{1}{2}\nabla(\mathbf{P}\cdot\mathbf{P})\\ &= \frac{1}{2}[\nabla(\mathbf{P}_c\cdot\mathbf{P}) + \nabla(\mathbf{P}\cdot\mathbf{P}_c)]\\ &= \nabla(\mathbf{P}_c\cdot\mathbf{P})\\ &= \mathbf{P}\times(\nabla\times\mathbf{P}) + (\mathbf{P}\cdot\nabla)\mathbf{P}\\ &= \mathbf{P}\times\mathrm{rot}\mathbf{P} + (\mathbf{P}\cdot\nabla)\mathbf{P}\end{aligned}$$

例 8 设 $\psi(\mathbf{r}) = \dfrac{(\mathbf{a}\cdot\mathbf{r})}{r^n}$，$\mathbf{a}$ = 常矢量，求 $\mathrm{grad}\psi(\mathbf{r})$。

解：

$$\begin{aligned}\mathrm{grad}\psi(\mathbf{r}) &= \mathrm{grad}\frac{(\mathbf{a}\cdot\mathbf{r})}{r^n} = \nabla\frac{(\mathbf{a}\cdot\mathbf{r})}{r^n}\\ &= \frac{1}{r^n}\nabla(\mathbf{a}\cdot\mathbf{r}) + (\mathbf{a}\cdot\mathbf{r})\nabla\frac{1}{r^n}\end{aligned}$$

$$= \frac{\mathbf{a}}{r^n} + (\mathbf{a} \cdot r) \frac{-nr^{n-1}\mathbf{r}}{r^{2n} r}$$

$$= \frac{\mathbf{a}}{r^n} - n(\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}) \frac{\mathbf{r}}{r^{n+2}}$$

例 9 设 $\phi(\mathbf{r}) = [\mathbf{a} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{b})]^2 + \mathbf{a}^2(\mathbf{b} \times \mathbf{r})^2$，式中 $\mathbf{a}$，$\mathbf{b}$ 均为常矢量，求 $\mathrm{grad}\phi(\mathbf{r})$。

解：

$$\mathrm{grad}\phi(\mathbf{r}) = \nabla\{[\mathbf{a} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{b})]^2 + \mathbf{a}^2(\mathbf{b} \times \mathbf{r})^2\}$$
$$= \nabla[\mathbf{a} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{b})]^2 + \nabla \mathbf{a}^2(\mathbf{b} \times \mathbf{r})^2$$

但由于

$$\nabla[\mathbf{a} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{b})]^2 = 2[\mathbf{a} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{b})]\nabla[\mathbf{a} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{b})]$$
$$= 2[\mathbf{a} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{b})]\nabla[\mathbf{r} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{a})]$$
$$= 2[\mathbf{a} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{b})](\mathbf{b} \times \mathbf{a})$$

（用辅助公式 8）

$$\nabla \mathbf{a}^2(\mathbf{b} \times \mathbf{r})^2 = \mathbf{a}^2\nabla[(\mathbf{b} \times \mathbf{r}) \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{r})]$$
$$= \mathbf{a}^2\nabla(\mathbf{b}^2\mathbf{r}^2 - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{b})^2]$$
$$= \mathbf{a}^2\mathbf{b}^2 2\mathbf{r} - \mathbf{a}^2 2(\mathbf{r} \cdot \mathbf{b})\mathbf{b}$$
$$= 2\mathbf{a}^2[\mathbf{r}\mathbf{b}^2 - \mathbf{b}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{b})]$$
$$= 2\mathbf{a}^2((\mathbf{b} \times \mathbf{r}) \times \mathbf{b})$$

故

$$\mathrm{grad}\phi(\mathbf{r}) = 2\{[\mathbf{a} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{b})](\mathbf{b} \times \mathbf{a}) + \mathbf{a}^2((\mathbf{b} \times \mathbf{r}) \times \mathbf{b})\}$$

例 10 设 $u = (\mathbf{r} \times \mathbf{a}) \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{b})$，式中 $\mathbf{a}$，$\mathbf{b}$ 均为常矢量，求 $\mathrm{grad}u$。

解：由于

$$u = r^2(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{a})(\mathbf{r} \cdot \mathbf{b})$$

故

$$\mathrm{grad}u = \nabla u$$
$$= \nabla\{r^2(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{a})(\mathbf{r} \cdot \mathbf{b})\}$$
$$= (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})2\mathbf{r} - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{a})\nabla(\mathbf{r} \cdot \mathbf{b})$$
$$- (\mathbf{r} \cdot \mathbf{b})\nabla(\mathbf{r} \cdot \mathbf{a})$$

$$= (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})2\mathbf{r} - (\mathbf{r}\cdot\mathbf{a})\mathbf{b} - (\mathbf{r}\cdot\mathbf{b})\mathbf{a}$$

$$= \mathbf{b}\times(\mathbf{r}\times\mathbf{a}) + \mathbf{a}\times(\mathbf{r}\times\mathbf{b})$$

例 11 求 $\mathrm{grad}[\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})]$。

解：

$$\begin{aligned}
&\mathrm{grad}[\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})]\\
&\quad= \nabla[\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})]\\
&\quad= \nabla[\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}_c\times\mathbf{c}_c)] + \nabla[\mathbf{b}\cdot(\mathbf{c}_c\times\mathbf{a}_c)]\\
&\qquad+ \nabla[\mathbf{c}\cdot(\mathbf{a}_c\times\mathbf{b}_c)]\\
&\quad= (\mathbf{b}_c\times\mathbf{c}_c)\times(\nabla\times\mathbf{a}) + [(\mathbf{b}_c\times\mathbf{c}_c)\cdot\nabla]\mathbf{a}\\
&\qquad+ (\mathbf{c}_c\times\mathbf{a}_c)\times(\nabla\times\mathbf{b}) + [\mathbf{c}_c\times\mathbf{a}_c)\cdot\nabla]\mathbf{b}\\
&\qquad+ (\mathbf{a}_c\times\mathbf{b}_c)\times(\nabla\times\mathbf{c}) + [(\mathbf{a}_c\times\mathbf{b}_c)\cdot\nabla]\mathbf{c}\\
&\quad= (\mathbf{b}\times\mathbf{c})\times\mathrm{rot}\mathbf{a} + [(\mathbf{b}\times\mathbf{c})\cdot\nabla]\mathbf{a}\\
&\qquad+ (\mathbf{c}\times\mathbf{a})\times\mathrm{rot}\mathbf{b} + [(\mathbf{c}\times\mathbf{a})\cdot\nabla]\mathbf{b}\\
&\qquad+ (\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathrm{rot}\mathbf{c} + [(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\nabla]\mathbf{c}
\end{aligned}$$

例 12 证明

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\cdot\nabla)\mathbf{c} &= \mathbf{b}\cdot(\mathbf{a}\cdot\nabla)\mathbf{c} + \mathbf{b}\cdot[\mathbf{a}\times\mathrm{rot}\mathbf{c}]\\
&= \mathbf{b}\cdot\mathrm{grad}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}) - \mathbf{c}\cdot(\mathbf{b}\cdot\nabla)\mathbf{a}
\end{aligned}$$

证：

(1)
$$\begin{aligned}
\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\cdot\nabla)\mathbf{c} &= (\mathbf{b}\cdot\nabla)(\mathbf{a}_c\cdot\mathbf{c})\\
&= \mathbf{b}\cdot[\mathbf{a}_c\times(\nabla\times\mathbf{c}) + (\mathbf{a}\cdot\nabla)\mathbf{c}]\\
&= \mathbf{b}\cdot[\mathbf{a}\times\mathrm{rot}\mathbf{c}] + \mathbf{b}\cdot(\mathbf{a}\cdot\nabla)\mathbf{c}
\end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned}
\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\cdot\nabla)\mathbf{c} &= (\mathbf{b}\cdot\nabla)(\mathbf{a}_c\cdot\mathbf{c})\\
&= (\mathbf{b}\cdot\nabla)(\mathbf{a}_c\cdot\mathbf{c}) + (\mathbf{b}\cdot\nabla)(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}_c)\\
&\qquad- (\mathbf{b}\cdot\nabla)(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}_c)\\
&= (\mathbf{b}\cdot\nabla)(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}) - (\mathbf{b}\cdot\nabla)(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}_c)\\
&= \mathbf{b}\cdot\nabla(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}) - \mathbf{c}\cdot(\mathbf{b}\cdot\nabla)\mathbf{a}\\
&= \mathbf{b}\cdot\mathrm{grad}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}) - \mathbf{c}\cdot(\mathbf{b}\cdot\nabla)\mathbf{a}
\end{aligned}$$

4-22-2 关于 div 的运算例题

例 1 证明

$$\mathrm{div}(\varphi \mathbf{a}) = \varphi \mathrm{div}\mathbf{a} + \mathbf{a} \cdot \mathrm{grad}\varphi$$

证：用柯青法则，得

$$\begin{aligned}\mathrm{div}(\varphi \mathbf{a}) &= \nabla \cdot (\varphi \mathbf{a}) \\ &= \nabla \cdot (\varphi_c \mathbf{a}) + \nabla \cdot (\varphi \mathbf{a}_c) \\ &= \varphi_c \nabla \cdot \mathbf{a} + \mathbf{a}_c \cdot \nabla \varphi \\ &= \varphi \mathrm{div}\mathbf{a} + \mathbf{a} \cdot \mathrm{grad}\varphi\end{aligned}$$

例 2 证明

$$\mathrm{div}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{b} \cdot \mathrm{rot}\mathbf{a} - \mathbf{a} \cdot \mathrm{rot}\mathbf{b}$$

证：用柯青法则，得

$$\begin{aligned}\mathrm{div}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) &= \nabla \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \\ &= \nabla \cdot (\mathbf{a}_c \times \mathbf{b}) + \nabla \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}_c) \\ &= -\mathbf{a}_c \cdot (\nabla \times \mathbf{b}) + \mathbf{b}_c \cdot (\nabla \times \mathbf{a}) \\ &= -\mathbf{a} \cdot \mathrm{rot}\mathbf{b} + \mathbf{b} \cdot \mathrm{rot}\mathbf{a} \\ &= \mathbf{b} \cdot \mathrm{rot}\mathbf{a} - \mathbf{a} \cdot \mathrm{rot}\mathbf{b}\end{aligned}$$

例 3 求 $\mathrm{div}\mathbf{r}\varphi(r)$。

解：

$$\begin{aligned}\mathrm{div}(\mathbf{r}\varphi(r)) &= \nabla \cdot (\mathbf{r}\varphi(r)) \\ &= \nabla \cdot (\mathbf{r}_c \varphi(r)) + \nabla \cdot (\mathbf{r}\varphi(r)_c) \\ &= \mathbf{r}_c \cdot \nabla \varphi(r) + \varphi(r)_c \nabla \cdot \mathbf{r} \\ &= \mathbf{r} \cdot \mathrm{grad}\varphi(r) + \varphi(r)\mathrm{div}\mathbf{r} \\ &= \mathbf{r} \cdot \varphi'(r)\frac{\mathbf{r}}{r} + 3\varphi(r)(\text{用辅助公式 } 3,9) \\ &= r\varphi'(r) + 3\varphi(r)\end{aligned}$$

例 4 求 $\mathrm{div} r^n \mathbf{c}$，其中 $\mathbf{c}$ 为常矢量。

解：

$$\begin{aligned}\mathrm{div} r^n \mathbf{c} &= \nabla \cdot r^n \mathbf{c} \\ &= \mathbf{c} \cdot \nabla r^n \\ &= \mathbf{c} \cdot (n r^{n-1} \mathbf{r}/r) \\ &= n r^{n-2} (\mathbf{c} \cdot \mathbf{r})\end{aligned}$$

例 5 证明 $\mathrm{div}(\mathbf{c} \times \mathbf{r}) = 0$，式中 $\mathbf{c}$ 为常矢量。

证：

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(\mathbf{c}\times\mathbf{r}) &= \nabla\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{r})\\ &= -\mathbf{c}\cdot(\nabla\times\mathbf{r})\\ &= 0 \qquad (\text{用辅助公式 7})\end{aligned}$$

例 6 证明 $\operatorname{div}\dfrac{\mathbf{r}}{r^3}=0$。

证：

$$\begin{aligned}\operatorname{div}\frac{\mathbf{r}}{r^3} &= \nabla\cdot\frac{\mathbf{r}}{r^3} = \nabla\cdot\left(\frac{\mathbf{r}_c}{r^3}\right)+\nabla\cdot\left(\frac{\mathbf{r}}{r_c^3}\right)\\ &= \mathbf{r}_c\cdot\nabla\left(\frac{1}{r^3}\right)+\frac{1}{r_c^3}\nabla\cdot\mathbf{r}\\ &= \mathbf{r}\cdot\frac{-3r^2\cdot\mathbf{r}/r}{r^6}+\frac{1}{r^3}3\\ &= -\frac{3}{r^3}+\frac{3}{r^3}=0\end{aligned}$$

例 7 证明 $\operatorname{div}\mathbf{a}(\mathbf{c}\cdot\mathbf{r})=\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}$，式中 $\mathbf{a},\mathbf{c}$ 均为常矢量。

证：

$$\begin{aligned}\operatorname{div}\mathbf{a}(\mathbf{c}\cdot\mathbf{r}) &= \nabla\cdot(\mathbf{a}(\mathbf{c}\cdot\mathbf{r}))\\ &= \mathbf{a}\cdot\nabla(\mathbf{c}\cdot\mathbf{r})\\ &= \mathbf{a}\cdot\mathbf{c} \qquad (\text{用辅助公式 8})\end{aligned}$$

例 8 证明 $\operatorname{div}[(\mathbf{r}\times\mathbf{a})\times\mathbf{c}]=-2(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})$ 式中 $\mathbf{a},\mathbf{c}$ 均为常矢量。

证：

$$\begin{aligned}\operatorname{div}[(\mathbf{r}\times\mathbf{a})\times\mathbf{c}] &= \nabla\cdot[(\mathbf{r}\times\mathbf{a})\times\mathbf{c}]\\ &= \nabla\cdot[\mathbf{a}(\mathbf{r}\cdot\mathbf{c})-\mathbf{r}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})]\\ &= \mathbf{a}\cdot\nabla(\mathbf{c}\cdot\mathbf{r})-(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})\nabla\cdot\mathbf{r}\\ &= \mathbf{a}\cdot\mathbf{c}-3\mathbf{a}\cdot\mathbf{c} \quad (\text{用辅助公式 8,9})\\ &= -2\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}\end{aligned}$$

例 9 证明 $\operatorname{div}[(\mathbf{r}\times\mathbf{a})\times\mathbf{r}]=-2(\mathbf{a}\cdot\mathbf{r})$，式中 $\mathbf{a}$ 为常矢量。

证：

$$\begin{aligned}
\mathrm{div}[(\mathbf{r}\times\mathbf{a})\times\mathbf{r}] &= \nabla\cdot[(\mathbf{r}\times\mathbf{a})\times\mathbf{r}] \\
&= \nabla\cdot(\mathbf{a}r^2 - \mathbf{r}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{r})) \\
&= \mathbf{a}\cdot\nabla r^2 - \nabla\cdot[\mathbf{r}_c(\mathbf{a}\cdot\mathbf{r})] \\
&\quad - \nabla\cdot[\mathbf{r}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{r}_c)] \\
&= 2(\mathbf{a}\cdot\mathbf{r}) - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{r}) - 3(\mathbf{a}\cdot\mathbf{r}) \\
&= -2(\mathbf{a}\cdot\mathbf{r})
\end{aligned}$$

（用辅助公式 4,8,9）

例 10 设 $\mathbf{m}\perp\mathbf{n}$，$\mathbf{m}$、$\mathbf{n}$ 均为常矢量，证明 $\mathrm{div}\mathbf{m}(\mathbf{n}\cdot\mathbf{r})=0$

证：

$$\begin{aligned}
\mathrm{div}\mathbf{m}(\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}) &= \nabla\cdot\mathbf{m}(\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}) \\
&= \nabla(\mathbf{n}\cdot\mathbf{r})\cdot\mathbf{m} \\
&= \mathbf{n}\cdot\mathbf{m} \qquad \text{（用辅助公式 8）} \\
&= 0
\end{aligned}$$

例 11 设 $\mathbf{P}(\mathbf{r})=(\mathbf{m}\cdot\mathbf{r})(\mathbf{m}\times\mathbf{r})$，式中 $\mathbf{m}$ 为常矢量，证明 $\mathrm{div}\mathbf{P}=0$。

证：

$$\begin{aligned}
\mathrm{div}\mathbf{P} &= \nabla\cdot(\mathbf{m}\cdot\mathbf{r})(\mathbf{m}\times\mathbf{r}) \\
&= \nabla\cdot(\mathbf{m}\cdot\mathbf{r}_c)(\mathbf{m}\times\mathbf{r}) + \nabla\cdot(\mathbf{m}\cdot\mathbf{r})(\mathbf{m}\times\mathbf{r}_c) \\
&= (\mathbf{m}\cdot\mathbf{r}_c)\nabla\cdot(\mathbf{m}\times\mathbf{r}) + (\mathbf{m}\times\mathbf{r}_c)\cdot\nabla(\mathbf{m}\cdot\mathbf{r}) \\
&= (\mathbf{m}\cdot\mathbf{r}_c)\nabla\cdot(\mathbf{m}\times\mathbf{r}) + (\mathbf{m}\times\mathbf{r}_c)\cdot\mathbf{m}
\end{aligned}$$

但

$$\begin{aligned}
\nabla\cdot(\mathbf{m}\times\mathbf{r}) &= -\mathbf{m}\cdot(\nabla\times\mathbf{r}) = 0 \\
\mathbf{m}\cdot(\mathbf{m}\times\mathbf{r}) &= \mathbf{r}\cdot(\mathbf{m}\times\mathbf{m}) = 0
\end{aligned}$$

故

$$\mathrm{div}\mathbf{P}=0$$

例 12 设 $\mathbf{P}=\phi\mathbf{a}$，式中 $\mathbf{a}$ 为常矢量，证明

$$\mathrm{div}\mathbf{P}=\mathrm{grad}\phi\cdot\mathbf{a}。$$

证：

$$\mathrm{div}\mathbf{P}=\nabla\cdot\phi\mathbf{a}=\mathbf{a}\cdot\nabla\phi=\mathbf{a}\cdot\mathrm{grad}\phi$$

例 13 设 $\mathbf{P}(\mathbf{r})=(\mathbf{a}\cdot\mathbf{r})\mathbf{r}-r^2\mathbf{b}$，式中 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 均为常矢

量，求 $\text{div}\mathbf{P}(\mathbf{r})$

解：

$$\begin{aligned}\text{div}\mathbf{P}(\mathbf{r}) &= \nabla\cdot[(\mathbf{a}\cdot\mathbf{r})\mathbf{r}-\mathbf{r}^2\mathbf{b}] \\ &= \nabla\cdot(\mathbf{a}\cdot\mathbf{r})\mathbf{r}-\nabla\cdot\mathbf{r}^2\mathbf{b}\end{aligned}$$

但

$$\begin{aligned}\nabla\cdot(\mathbf{a}\cdot\mathbf{r})\mathbf{r} &= \nabla\cdot(\mathbf{a}\cdot\mathbf{r}_c)\mathbf{r}+\mathbf{r}_c\cdot\nabla(\mathbf{a}\cdot\mathbf{r}) \\ &= 3(\mathbf{a}\cdot\mathbf{r})+\mathbf{a}\cdot\mathbf{r} \qquad \text{（用辅助公式 8,9）} \\ &= 4(\mathbf{a}\cdot\mathbf{r})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\mathbf{r}^2\mathbf{b} &= \nabla\mathbf{r}^2\cdot\mathbf{b} \\ &= 2r\frac{\mathbf{r}}{r}\cdot\mathbf{b} \\ &= 2(\mathbf{r}\cdot\mathbf{b})\end{aligned}$$

因此

$$\text{div}\mathbf{P}(\mathbf{r}) = 4(\mathbf{a}\cdot\mathbf{r})-2(\mathbf{b}\cdot\mathbf{r})$$

例 14 设 $\mathbf{P}(\mathbf{r})=(\mathbf{a}\times\mathbf{r})^2(\mathbf{a}\times\mathbf{r})$，式中 $\mathbf{a}$ 为常矢量，求 $\text{div}\mathbf{P}(\mathbf{r})$。

解：

$$\begin{aligned}\text{div}\mathbf{P}(\mathbf{r}) &= \nabla\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{r})^2(\mathbf{a}\times\mathbf{r}) \\ &= \nabla\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{r}_c)^2(\mathbf{a}\times\mathbf{r})+\nabla\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{r})^2(\mathbf{a}\times\mathbf{r}_c) \\ &= (\mathbf{a}\times\mathbf{r})^2\nabla\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{r})+(\mathbf{a}\times\mathbf{r})\cdot\nabla(\mathbf{a}\times\mathbf{r})^2\end{aligned}$$

但

$$\nabla\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{r}) = -\mathbf{a}\cdot(\nabla\times\mathbf{r}) = 0 \qquad \text{（用辅助公式 7）}$$

$$\begin{aligned}\nabla(\mathbf{a}\times\mathbf{r})^2 &= \nabla[(\mathbf{a}\times\mathbf{r})\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{r})] \\ &= \nabla[\mathbf{a}^2\mathbf{r}^2-(\mathbf{a}\cdot\mathbf{r})^2] \\ &= \mathbf{a}^2\nabla\mathbf{r}^2-\nabla(\mathbf{a}\cdot\mathbf{r})^2 \\ &= 2\mathbf{a}^2\mathbf{r}-2(\mathbf{a}\cdot\mathbf{r})\nabla(\mathbf{a}\cdot\mathbf{r}) \\ &= 2\mathbf{a}^2\mathbf{r}-2(\mathbf{a}\cdot\mathbf{r})\mathbf{a}\end{aligned}$$

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{r})\cdot 2\mathbf{a}^2\mathbf{r} = 2\mathbf{a}^2\mathbf{a}\cdot(\mathbf{r}\times\mathbf{r}) = 0$$

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{r})\cdot 2(\mathbf{a}\cdot\mathbf{r})\mathbf{a} = -2(\mathbf{a}\cdot\mathbf{r})(\mathbf{a}\times\mathbf{a})\cdot\mathbf{r} = 0$$

故

$$\operatorname{div}\mathbf{P}(\mathbf{r}) = 0$$

例 15 证明

$$\operatorname{div}\mathbf{P}(\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}) = (\mathbf{q}\cdot\mathbf{r})\operatorname{div}\mathbf{P} + (\mathbf{P}\cdot\mathbf{q}) + \mathbf{r}\cdot(\mathbf{P}\cdot\nabla)\mathbf{q}$$

证:

$$\begin{aligned}\operatorname{div}\mathbf{P}(\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}) &= \nabla\cdot(\mathbf{P}(\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}))\\ &= \nabla\cdot\mathbf{P}_c(\mathbf{q}_c\cdot\mathbf{r}) + \nabla\cdot\mathbf{P}_c(\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}_c)\\ &\quad + \nabla\cdot\mathbf{P}(\mathbf{q}_c\cdot\mathbf{r}_c)\\ &= \nabla(\mathbf{q}_c\cdot\mathbf{r})\cdot\mathbf{P}_c + \nabla(\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}_c)\cdot\mathbf{P}_c\\ &\quad + \nabla\cdot\mathbf{P}(\mathbf{q}_c\cdot\mathbf{r}_c)\end{aligned}$$

但

$$\nabla\cdot\mathbf{P}(\mathbf{q}_c\cdot\mathbf{r}_c) = (\mathbf{q}\cdot\mathbf{r})\operatorname{div}\mathbf{P}$$

$$\nabla(\mathbf{q}_c\cdot\mathbf{r})\cdot\mathbf{P}_c = \mathbf{q}\cdot\mathbf{P}$$

$$\begin{aligned}\nabla(\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}_c)\cdot\mathbf{P}_c &= \mathbf{P}_c\cdot\nabla(\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}_c)\\ &= (\mathbf{P}_c\cdot\nabla)(\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}_c)\\ &= \mathbf{r}_c\cdot(\mathbf{P}_c\cdot\nabla)\mathbf{q}\\ &= \mathbf{r}\cdot(\mathbf{P}\cdot\nabla)\mathbf{q}\end{aligned}$$

因此

$$\operatorname{div}\mathbf{P}(\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}) = (\mathbf{q}\cdot\mathbf{r})\operatorname{div}\mathbf{P} + \mathbf{P}\cdot\mathbf{q} + \mathbf{r}\cdot(\mathbf{P}\cdot\nabla)\mathbf{q}$$

例 16 设 $\mathbf{P} = \alpha\dfrac{\mathbf{r}}{r}$, 证明

$$\operatorname{div}\mathbf{P} = \operatorname{grad}\alpha\cdot\frac{\mathbf{r}}{r} + \frac{2\alpha}{r}$$

证:

$$\begin{aligned}\operatorname{div}\mathbf{P} &= \nabla\cdot\alpha\frac{\mathbf{r}}{r} = \nabla\cdot\left(\frac{\alpha}{r}\right)_c\mathbf{r} + \nabla\cdot\left(\frac{\alpha}{r}\right)\mathbf{r}_c\\ &= \frac{\alpha}{r}\nabla\cdot\mathbf{r} + \mathbf{r}_c\cdot\nabla\frac{\alpha}{r}\\ &= \frac{3\alpha}{r} + \mathbf{r}\cdot\nabla\frac{\alpha}{r}\end{aligned}$$

但

$$\nabla \frac{\alpha}{r} = \frac{1}{r} \nabla\alpha + \alpha\nabla \frac{1}{r}$$

$$= \frac{1}{r} \mathrm{grad}\alpha + \alpha \frac{-\mathbf{r}}{r^2 r}$$

$$\mathbf{r} \cdot \nabla \frac{\alpha}{r} = \frac{\mathbf{r}}{r} \cdot \mathrm{grad}\alpha - \frac{\alpha}{r}$$

因此

$$\mathrm{div}\mathbf{P} = \mathrm{grad}\alpha \cdot \frac{\mathbf{r}}{r} + \frac{2\alpha}{r}$$

例 17 证明 $\mathrm{div} \frac{(\mathbf{a} \times \mathbf{r})}{r^n} = 0$，式中 $\mathbf{a}$ 为常矢量。

证:

$$\mathrm{div} \frac{(\mathbf{a} \times \mathbf{r})}{r^n} = \nabla \cdot \frac{(\mathbf{a} \times \mathbf{r})}{r^n}$$

$$= \frac{1}{r^n} \nabla \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{r}) + \nabla \frac{1}{r^n} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{r}_c)$$

但

$$\nabla \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{r}) = -\mathbf{a} \cdot (\nabla \times \mathbf{r}) = 0 \qquad \text{(用辅助公式 7)}$$

$$\nabla \frac{1}{r^n} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{r}_c) = \frac{-nr^{n-2}\mathbf{r}}{r^{2n}} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{r}) = 0$$

故

$$\mathrm{div} \frac{(\mathbf{a} \times \mathbf{r})}{r^n} = 0$$

例 18 设 $\mathbf{e}$ 为单位常矢量，证明

$$\mathrm{div}\mathbf{u} = \mathbf{e} \cdot [(\mathbf{e} \cdot \nabla)\mathbf{u} + \mathrm{rot}(\mathbf{e} \times \mathbf{u})]$$

式中 $\mathbf{u}$ 为任意矢量函数。

证:

$$\mathrm{rot}(\mathbf{e} \times \mathbf{u}) = \nabla \times (\mathbf{e} \times \mathbf{u})$$

$$= \mathbf{e} \cdot (\nabla \cdot \mathbf{u}) - (\mathbf{e} \cdot \nabla)\mathbf{u}$$

$$= \mathbf{e}\mathrm{div}\mathbf{u} - (\mathbf{e} \cdot \nabla)\mathbf{u}$$

因此

$$\mathbf{e}\,\mathrm{div}\,\mathbf{u} = (\mathbf{e}\cdot\nabla)\mathbf{u} + \mathrm{rot}(\mathbf{e}\times\mathbf{u})$$

两边点乘以 $\mathbf{e}$，考虑到 $\mathbf{e}\cdot\mathbf{e}=1$，得

$$\mathrm{div}\,\mathbf{u} = \mathbf{e}\cdot[(\mathbf{e}\cdot\nabla)\mathbf{u} + \mathrm{rot}(\mathbf{e}\times\mathbf{u})]$$

例 19 证明

$$\mathrm{div}\,\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{a}^2} = \frac{\mathrm{div}\,\mathbf{a}}{\mathbf{a}^2} - \frac{2\mathbf{a}\cdot(\mathbf{a}\cdot\nabla)\mathbf{a}}{(\mathbf{a}^2)^2}$$

证:

$$\mathrm{div}\,\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{a}^2} = \frac{1}{\mathbf{a}^2}\nabla\cdot\mathbf{a} + \nabla\cdot\frac{\mathbf{a}_c}{\mathbf{a}^2}$$

$$= \frac{\mathrm{div}\,\mathbf{a}}{\mathbf{a}^2} + \nabla\frac{1}{\mathbf{a}^2}\cdot\mathbf{a}_c$$

但

$$\nabla\frac{1}{\mathbf{a}^2} = -\frac{\nabla\mathbf{a}^2}{(\mathbf{a}^2)^2} = -\frac{2\nabla(\mathbf{a}_c\cdot\mathbf{a})}{(\mathbf{a}^2)^2}$$

$$= -2\,\frac{\mathbf{a}\times(\nabla\times\mathbf{a}) + (\mathbf{a}\cdot\nabla)\mathbf{a}}{(\mathbf{a}^2)^2}$$

对等式左边点乘 $\mathbf{a}_c$，由于

$$\mathbf{a}\cdot[\mathbf{a}\times(\nabla\times\mathbf{a})] = (\mathbf{a}\times\mathbf{a})\cdot(\nabla\times\mathbf{a}) = 0$$

因此

$$\nabla\frac{1}{\mathbf{a}^2}\cdot\mathbf{a}_c = -\frac{2\mathbf{a}\cdot(\mathbf{a}\cdot\nabla)\mathbf{a}}{(\mathbf{a}^2)^2}$$

最后得

$$\mathrm{div}\,\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{a}^2} = \frac{\mathrm{div}\,\mathbf{a}}{\mathbf{a}^2} - \frac{2\mathbf{a}\cdot(\mathbf{a}\cdot\nabla)\mathbf{a}}{(\mathbf{a}^2)^2}$$

例 20 设 $\mathbf{a},\mathbf{b}$ 为常矢量，求

$$\mathrm{div}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{r})(\mathbf{b}\times\mathbf{r}).$$

解:

$$\mathrm{div}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{r})(\mathbf{b}\times\mathbf{r}) = \nabla\cdot(\mathbf{a}\cdot\mathbf{r})(\mathbf{b}\times\mathbf{r})$$

$$= \nabla\cdot(\mathbf{a}\cdot\mathbf{r}_c)(\mathbf{b}\times\mathbf{r}) + \nabla\cdot(\mathbf{a}\cdot\mathbf{r})(\mathbf{b}\times\mathbf{r}_c)$$

$$= (\mathbf{a}\cdot\mathbf{r})\nabla\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{r}) + \nabla(\mathbf{a}\cdot\mathbf{r})\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{r}_c)$$

因

$$\nabla\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{r})=-\mathbf{b}\cdot(\nabla\times\mathbf{r})=0 \quad \text{(用辅助公式 7)}$$

$$\nabla(\mathbf{a}\cdot\mathbf{r})=\mathbf{a} \quad \text{(用辅助公式 8)}$$

故

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{r})(\mathbf{b}\times\mathbf{r})&=\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{r})\\&=\mathbf{r}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\end{aligned}$$

例 21 求 $\operatorname{div}[\mathbf{a}(\mathbf{r}\cdot\mathbf{b})-\mathbf{r}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})+\mathbf{b}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{r})]$，式中 $\mathbf{a}$，$\mathbf{b}$ 均为常矢量。

解：因

$$\begin{aligned}\operatorname{div}\mathbf{a}(\mathbf{r}\cdot\mathbf{b})&=\nabla\cdot\mathbf{a}(\mathbf{r}\cdot\mathbf{b})\\&=\mathbf{a}\cdot\nabla(\mathbf{r}\cdot\mathbf{b})\\&=\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\end{aligned}$$

同理

$$\operatorname{div}\mathbf{b}(\mathbf{r}\cdot\mathbf{a})=\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$$

$$-\operatorname{div}\mathbf{r}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})=-3\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} \quad \text{(用辅助公式 9)}$$

故

$$\operatorname{div}[\mathbf{a}(\mathbf{r}\cdot\mathbf{b})-\mathbf{r}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})+\mathbf{b}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{r})]=-\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$$

例 22 设 $\mathbf{a}$ 为常矢量，证明 $\operatorname{div}\dfrac{(\mathbf{a}\times\mathbf{r})}{(\mathbf{a}\times\mathbf{r})^2}=0$。

证：

$$\begin{aligned}\operatorname{div}\frac{(\mathbf{a}\times\mathbf{r})}{(\mathbf{a}\times\mathbf{r})^2}&=\nabla\cdot\frac{(\mathbf{a}\times\mathbf{r})}{(\mathbf{a}\times\mathbf{r})^2}\\&=\frac{1}{(\mathbf{a}\times\mathbf{r})^2}\nabla\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{r})+(\mathbf{a}\times\mathbf{r})\cdot\nabla\frac{1}{(\mathbf{a}\times\mathbf{r})^2}\\&=(\mathbf{a}\times\mathbf{r})\cdot\nabla\frac{1}{(\mathbf{a}\times\mathbf{r})^2} \quad \text{(因 }\nabla\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{r})=0\text{)}\end{aligned}$$

但

$$\nabla\frac{1}{(\mathbf{a}\times\mathbf{r})^2}=\frac{-1}{(\mathbf{a}\times\mathbf{r})^4}\nabla(\mathbf{a}\times\mathbf{r})^2$$

而

$$\nabla(\mathbf{a}\times\mathbf{r})^2=2(\mathbf{a}\times(\mathbf{r}\times\mathbf{a})) \quad \text{(见 4-22-1 例 10)}$$

$$= 2a^2\mathbf{r} - 2\mathbf{a}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{r})$$

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{r})\cdot\mathbf{a} = 0$$

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{r})\cdot\mathbf{r} = 0$$

故

$$\operatorname{div}\frac{(\mathbf{a}\times\mathbf{r})}{(\mathbf{a}\times\mathbf{r})^2} = 0$$

4-22-3　关于 rot 的运算例题

例 1　证明 $\operatorname{rot}(\varphi\mathbf{a}) = \varphi\operatorname{rot}\mathbf{a} + \operatorname{grad}\varphi\times\mathbf{a}$。

证：

$$\begin{aligned}\operatorname{rot}(\varphi\mathbf{a}) &= \nabla\times\varphi\mathbf{a}\\ &= \nabla\times\varphi_c\mathbf{a} + \nabla\times\varphi\mathbf{a}_c\\ &= \varphi_c\nabla\times\mathbf{a} + \nabla\varphi\times\mathbf{a}_c\\ &= \varphi\operatorname{rot}\mathbf{a} + \operatorname{grad}\varphi\times\mathbf{a}\end{aligned}$$

例 2　证明 $\operatorname{rot}(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) = (\mathbf{b}\cdot\nabla)\mathbf{a} - (\mathbf{a}\cdot\nabla)\mathbf{b} + \mathbf{a}\operatorname{div}\mathbf{b} - \mathbf{b}\operatorname{div}\mathbf{a}$。

证：

$$\begin{aligned}\operatorname{rot}(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) &= \nabla\times(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\\ &= \nabla\times(\mathbf{a}_c\times\mathbf{b}) + \nabla\times(\mathbf{a}\times\mathbf{b}_c)\\ &= \mathbf{a}_c(\nabla\cdot\mathbf{b}) - (\mathbf{a}_c\cdot\nabla)\mathbf{b} + (\mathbf{b}_c\cdot\nabla)\mathbf{a}\\ &\quad - \mathbf{b}_c(\nabla\cdot\mathbf{a})\\ &= (\mathbf{b}\cdot\nabla)\mathbf{a} - (\mathbf{a}\cdot\nabla)\mathbf{b} + \mathbf{a}\operatorname{div}\mathbf{b} - \mathbf{b}\operatorname{div}\mathbf{a}\end{aligned}$$

例 3　证明 $\operatorname{rot}\mathbf{r}\varphi(r) = 0$。

证：

$$\begin{aligned}\operatorname{rot}\mathbf{r}\varphi(r) &= \nabla\times(\mathbf{r}\varphi(r))\\ &= \nabla\times(\mathbf{r}_c\varphi(r)) + \nabla\times(\mathbf{r}\varphi(r)_c)\\ &= \varphi(r)\nabla\times\mathbf{r} + \nabla\varphi(r)\times\mathbf{r}_c\\ &= -\mathbf{r}\times\varphi'(r)\frac{\mathbf{r}}{r} = 0 \qquad \text{（用辅助公式 4，8）}\end{aligned}$$

例 4　证明 $\operatorname{rot}\mathbf{r}(\mathbf{c}\cdot\mathbf{r}) = \mathbf{c}\times\mathbf{r}$　　式中 $\mathbf{c}$ 为常矢量。

证:

$$\begin{aligned}\text{rot}\mathbf{r}(\mathbf{c}\cdot\mathbf{r}) &= \nabla\times(\mathbf{r}(\mathbf{c}\cdot\mathbf{r}))\\ &= \nabla\times(\mathbf{r}_c(\mathbf{c}\cdot\mathbf{r}))+\nabla\times(\mathbf{r}(\mathbf{c}\cdot\mathbf{r}_c))\\ &= \nabla(\mathbf{c}\cdot\mathbf{r})\times\mathbf{r}_c+(\mathbf{c}\cdot\mathbf{r}_c)\nabla\times\mathbf{r}\\ &= \mathbf{c}\times\mathbf{r} \qquad (\text{用辅助公式 }7,8)\end{aligned}$$

例 5 证明$\text{rot}(\mathbf{c}\times\mathbf{r})=2\mathbf{c}$，式中 $\mathbf{c}$ 为常矢量.

证:

$$\begin{aligned}\text{rot}(\mathbf{c}\times\mathbf{r}) &= \nabla\times(\mathbf{c}\times\mathbf{r})\\ &= \mathbf{c}(\nabla\cdot\mathbf{r})-(\mathbf{c}\cdot\nabla)\mathbf{r}\\ &= 3\mathbf{c}-\mathbf{c} \qquad (\text{用辅助公式 }6,9)\\ &= 2\mathbf{c}\end{aligned}$$

例 6 设 $\mathbf{a}$ 为常矢量,求 $\text{rot}r\mathbf{a}$.

解:

$$\begin{aligned}\text{rot}r\mathbf{a} &= \nabla\times r\mathbf{a}\\ &= -\mathbf{a}\times\nabla r\\ &= -\mathbf{a}\times\frac{\mathbf{r}}{r}\\ &= \frac{1}{r}\mathbf{r}\times\mathbf{a}\end{aligned}$$

例 7 设 $\mathbf{p}=r^2\mathbf{r}$，求 $\text{rot}\mathbf{p}$.

解:

$$\begin{aligned}\text{rot}\mathbf{p} &= \nabla\times r^2\mathbf{r}\\ &= \nabla\times r_c^2\mathbf{r}+\nabla\times r^2\mathbf{r}_c\\ &= r_c^2\nabla\times\mathbf{r}-\mathbf{r}_c\times\nabla r^2\\ &= -\mathbf{r}\times 2r\cdot\frac{\mathbf{r}}{r} \qquad (\text{用辅助公式 }7)\\ &= 0\end{aligned}$$

例 8 设 $\mathbf{a}$ 为常矢量,求 $\text{rot}\phi\mathbf{a}$.

解:

$$\text{rot}\phi\mathbf{a}=\nabla\times\phi\mathbf{a}=-\mathbf{a}\times\nabla\phi=\text{grad}\phi\times\mathbf{a}$$

例 9 求 $\mathrm{rot}\mathbf{c}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{r})$，式中 $\mathbf{a},\mathbf{c}$ 为常矢量

解：

$$\begin{aligned}\mathrm{rot}\mathbf{c}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{r}) &= \nabla\times\mathbf{c}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{r})\\ &= -\mathbf{c}\times\nabla(\mathbf{a}\cdot\mathbf{r})\\ &= -\mathbf{c}\times\mathbf{a} \quad (\text{用辅助公式 8})\\ &= \mathbf{a}\times\mathbf{c}\end{aligned}$$

例 10 设 $\mathbf{a},\mathbf{c}$ 为常矢量，求 $\mathrm{rot}[(\mathbf{c}\times\mathbf{r})\times\mathbf{a}]$。

解：

$$\begin{aligned}\mathrm{rot}[(\mathbf{c}\times\mathbf{r})\times\mathbf{a}] &= \nabla\times[(\mathbf{c}\times\mathbf{r})\times\mathbf{a}]\\ &= \nabla\times(\mathbf{r}(\mathbf{c}\cdot\mathbf{a})-\mathbf{c}(\mathbf{r}\cdot\mathbf{a}))\\ &= (\mathbf{c}\cdot\mathbf{a})\nabla\times\mathbf{r}-\nabla\times\mathbf{c}(\mathbf{r}\cdot\mathbf{a})\\ &= \mathbf{c}\times\nabla(\mathbf{r}\cdot\mathbf{a}) \quad (\text{用辅助公式 7})\\ &= \mathbf{c}\times\mathbf{a} \quad (\text{用辅助公式 8})\end{aligned}$$

例 11 设 $\mathbf{c}$ 为常矢量，证明 $\mathrm{rot}[(\mathbf{c}\times\mathbf{r})\times\mathbf{r}] = 3\mathbf{c}\times\mathbf{r}$。

证：

$$\begin{aligned}&\mathrm{rot}[(\mathbf{c}\times\mathbf{r})\times\mathbf{r}] = \nabla\times[(\mathbf{c}\times\mathbf{r})\times\mathbf{r}]\\ &= \nabla\times(\mathbf{r}(\mathbf{c}\cdot\mathbf{r})-\mathbf{c}r^2)\\ &= \nabla\times\mathbf{r}_c(\mathbf{c}\cdot\mathbf{r})+\nabla\times\mathbf{r}(\mathbf{c}\cdot\mathbf{r}_c)-\nabla\times\mathbf{c}r^2\\ &= -\mathbf{r}_c\times\nabla(\mathbf{c}\cdot\mathbf{r})+(\mathbf{c}\cdot\mathbf{r}_c)\nabla\times\mathbf{r}-\nabla r^2\times\mathbf{c}\\ &= -\mathbf{r}\times\mathbf{c}-2\mathbf{r}\times\mathbf{c} \quad (\text{用辅助公式 4,7,8})\\ &= -3\mathbf{r}\times\mathbf{c}\\ &= 3\mathbf{c}\times\mathbf{r}\end{aligned}$$

例 12 证明

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathrm{rot}\mathbf{c} = \mathbf{b}\cdot(\mathbf{a}\cdot\nabla)\mathbf{c}-\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\cdot\nabla)\mathbf{c}.$$

证：

$$\begin{aligned}(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathrm{rot}\mathbf{c} &= (\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot(\nabla\times\mathbf{c})\\ &= (\mathbf{a}\cdot\nabla)(\mathbf{b}_c\cdot\mathbf{c})-(\mathbf{b}\cdot\nabla)(\mathbf{a}_c\cdot\mathbf{c})\\ &= \mathbf{b}_c\cdot(\mathbf{a}\cdot\nabla)\mathbf{c}-\mathbf{a}_c\cdot(\mathbf{b}\cdot\nabla)\mathbf{c}\\ &= \mathbf{b}\cdot(\mathbf{a}\cdot\nabla)\mathbf{c}-\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\cdot\nabla)\mathbf{c}\end{aligned}$$

例 13 设 $\mathbf{l},\mathbf{m},\mathbf{n}$ 均为常矢量，证明

$$\text{rot}[\mathbf{l}(\mathbf{m}\cdot\mathbf{r})(\mathbf{n}\cdot\mathbf{r})+\mathbf{m}(\mathbf{n}\cdot\mathbf{r})(\mathbf{l}\cdot\mathbf{r})$$
$$+\mathbf{n}(\mathbf{l}\cdot\mathbf{r})(\mathbf{m}\cdot\mathbf{r})]=0$$

证:

$$\begin{aligned}
&\text{rot}[\mathbf{l}(\mathbf{m}\cdot\mathbf{r})(\mathbf{n}\cdot\mathbf{r})]\\
&=\nabla\times[\mathbf{l}(\mathbf{m}\cdot\mathbf{r})(\mathbf{n}\cdot\mathbf{r})]\\
&=\nabla\times[\mathbf{l}(\mathbf{m}\cdot\mathbf{r}_c)(\mathbf{n}\cdot\mathbf{r})]+\nabla\times[\mathbf{l}(\mathbf{m}\cdot\mathbf{r})(\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}_c)]\\
&=(\mathbf{m}\cdot\mathbf{r})\nabla\times[\mathbf{l}(\mathbf{n}\cdot\mathbf{r})]+(\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}_c)\nabla\times[\mathbf{l}(\mathbf{m}\cdot\mathbf{r})]\\
&=(\mathbf{m}\cdot\mathbf{r})[\nabla(\mathbf{n}\cdot\mathbf{r})\times\mathbf{l}]+(\mathbf{n}\cdot\mathbf{r})[\nabla(\mathbf{m}\cdot\mathbf{r})\times\mathbf{l}]\\
&=(\mathbf{m}\cdot\mathbf{r})(\mathbf{n}\times\mathbf{l})+(\mathbf{n}\cdot\mathbf{r})(\mathbf{m}\times\mathbf{l})\quad\text{(用辅助公式 8)}
\end{aligned}$$

同理

$$\text{rot}[\mathbf{m}(\mathbf{n}\cdot\mathbf{r})(\mathbf{l}\cdot\mathbf{r})]=(\mathbf{n}\cdot\mathbf{r})(\mathbf{l}\times\mathbf{m})+(\mathbf{l}\cdot\mathbf{r})(\mathbf{n}\times\mathbf{m})$$
$$\text{rot}[\mathbf{n}(\mathbf{l}\cdot\mathbf{r})(\mathbf{m}\cdot\mathbf{r})]=(\mathbf{l}\cdot\mathbf{r})(\mathbf{m}\times\mathbf{n})+(\mathbf{m}\cdot\mathbf{r})(\mathbf{l}\times\mathbf{n})$$

将三项相加,即得证。

例 14 设 $\mathbf{a},\mathbf{b}$ 为常矢量,求 $\text{rot}[(\mathbf{a}\cdot\mathbf{r})\mathbf{r}-r^2\mathbf{b}]$。

解:

$$\begin{aligned}
&\text{rot}[(\mathbf{a}\cdot\mathbf{r})\mathbf{r}-r^2\mathbf{b}]\\
&=\nabla\times(\mathbf{a}\cdot\mathbf{r}_c)\mathbf{r}+\nabla\times(\mathbf{a}\cdot\mathbf{r})\mathbf{r}_c-\nabla r^2\times\mathbf{b}\\
&=(\mathbf{a}\cdot\mathbf{r})\nabla\times\mathbf{r}+\nabla(\mathbf{a}\cdot\mathbf{r})\times\mathbf{r}_c-2\mathbf{r}\times\mathbf{b}\\
&=\mathbf{a}\times\mathbf{r}+2\mathbf{b}\times\mathbf{r}\quad\text{(辅助公式 7,8)}
\end{aligned}$$

例 15 设 $\mathbf{a}$ 为常矢量,求 $\text{rot}\,\dfrac{(\mathbf{a}\times\mathbf{r})}{r^n}$。

解:

$$\text{rot}\,\frac{(\mathbf{a}\times\mathbf{r})}{r^n}=\nabla\times\frac{(\mathbf{a}\times\mathbf{r})}{r^n}$$
$$=\frac{1}{r^n}\nabla\times(\mathbf{a}\times\mathbf{r})+\nabla\frac{1}{r^n}\times(\mathbf{a}\times\mathbf{r}_c)$$
$$=\frac{1}{r^n}(\mathbf{a}(\nabla\cdot\mathbf{r})-(\mathbf{a}\cdot\nabla)\mathbf{r})+\frac{-nr^{n-1}\mathbf{r}}{r^{2n}r}\times(\mathbf{a}\times\mathbf{r})$$
$$=\frac{1}{r^n}(3\mathbf{a}-\mathbf{a})-\frac{n}{r^{n+2}}(\mathbf{r}\times(\mathbf{a}\times\mathbf{r}))$$

$$= \frac{2\mathbf{a}}{r^n} - \frac{n}{r^{n+2}}(\mathbf{a}r^2 - \mathbf{r}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{r}))$$

$$= \frac{2\mathbf{a}}{r^n} - \frac{n\mathbf{a}}{r^n} + \frac{n\mathbf{r}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{r})}{r^{n+2}}$$

$$= \frac{(2-n)\mathbf{a}}{r^n} + n\frac{\mathbf{r}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{r})}{r^{n+2}}$$

例 16 设 $\mathbf{a}$ 为常矢量,证明 $\text{rot}\,\frac{(\mathbf{a}\times\mathbf{r})}{(\mathbf{a}\times\mathbf{r})^2} = 0$。

证:

$$\text{rot}\,\frac{(\mathbf{a}\times\mathbf{r})}{(\mathbf{a}\times\mathbf{r})^2} = \nabla\times\frac{(\mathbf{a}\times\mathbf{r})}{(\mathbf{a}\times\mathbf{r})^2}$$

$$= \frac{1}{(\mathbf{a}\times\mathbf{r})^2}\nabla\times(\mathbf{a}\times\mathbf{r}) + \nabla\times\frac{(\mathbf{a}\times\mathbf{r}_c)}{(\mathbf{a}\times\mathbf{r})^2}$$

但

$$\nabla\times(\mathbf{a}\times\mathbf{r}) = \mathbf{a}(\nabla\cdot\mathbf{r}) - (\mathbf{a}\cdot\nabla)\mathbf{r}$$
$$= 3\mathbf{a} - \mathbf{a} = 2\mathbf{a}$$

故

$$\frac{\nabla\times(\mathbf{a}\times\mathbf{r})}{(\mathbf{a}\times\mathbf{r})^2} = \frac{2\mathbf{a}}{(\mathbf{a}\times\mathbf{r})^2}$$

现求

$$\nabla\times\frac{(\mathbf{a}\times\mathbf{r}_c)}{(\mathbf{a}\times\mathbf{r})^2},$$

$$\nabla\times\frac{(\mathbf{a}\times\mathbf{r}_c)}{(\mathbf{a}\times\mathbf{r})^2} = \nabla\frac{1}{(\mathbf{a}\times\mathbf{r})^2}\times(\mathbf{a}\times\mathbf{r}_c)$$

但

$$\nabla\frac{1}{(\mathbf{a}\times\mathbf{r})^2} = \frac{2\mathbf{a}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{r}) - \mathbf{a}^2 2\mathbf{r}}{(\mathbf{a}\times\mathbf{r})^4} \quad \text{(4-22-2, 例 14)}$$

又

$$\mathbf{a}\times(\mathbf{a}\times\mathbf{r}) = \mathbf{a}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{r}) - \mathbf{r}a^2$$
$$\mathbf{r}\times(\mathbf{a}\times\mathbf{r}) = \mathbf{a}r^2 - \mathbf{r}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{r})$$

故

$$\nabla \times \frac{(\mathbf{a} \times \mathbf{r}_c)}{(\mathbf{a} \times \mathbf{r})^2}$$

$$= \frac{2\mathbf{a}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{r})^2 - 2(\mathbf{a} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}\mathbf{a}^2 - 2\mathbf{a}^2\mathbf{a}r^2 + 2\mathbf{a}^2\mathbf{r}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{r})}{(\mathbf{a} \times \mathbf{r})^4}$$

$$= \frac{-2\mathbf{a}(\mathbf{a}^2 r^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{r})^2)}{(\mathbf{a} \times \mathbf{r})^4}$$

$$= \frac{-2\mathbf{a}(\mathbf{a} \times \mathbf{r})^2}{(\mathbf{a} \times \mathbf{r})^4}$$

$$= \frac{-2\mathbf{a}}{(\mathbf{a} \times \mathbf{r})^2}$$

因此

$$\mathrm{rot}\, \frac{(\mathbf{a} \times \mathbf{r})}{(\mathbf{a} \times \mathbf{r})^2} = 0$$

例 17 设 $\mathbf{a}$ 为常矢量，$\mathbf{p} = (\mathbf{a} \times \mathbf{r})^2(\mathbf{a} \times \mathbf{r})$，证明

$$\mathrm{rot}\mathbf{p} = 4(\mathbf{a} \times \mathbf{r})^2\mathbf{a}.$$

证：

$$\begin{aligned}\mathrm{rot}\mathbf{p} &= \nabla \times [(\mathbf{a} \times \mathbf{r})^2(\mathbf{a} \times \mathbf{r})] \\ &= \nabla \times [(\mathbf{a} \times \mathbf{r}_c)^2(\mathbf{a} \times \mathbf{r})] \\ &\quad + \nabla \times [(\mathbf{a} \times \mathbf{r})^2(\mathbf{a} \times \mathbf{r}_c)]\end{aligned}$$

但

$$\begin{aligned}\nabla \times [(\mathbf{a} \times \mathbf{r}_c)^2(\mathbf{a} \times \mathbf{r})] &= (\mathbf{a} \times \mathbf{r}_c)^2\nabla \times (\mathbf{a} \times \mathbf{r}) \\ &= (\mathbf{a} \times \mathbf{r}_c)^2(\mathbf{a}(\nabla \cdot \mathbf{r}) - (\mathbf{a} \cdot \nabla)\mathbf{r}) \\ &= (\mathbf{a} \times \mathbf{r})^2(3\mathbf{a} - \mathbf{a}) \\ &= 2(\mathbf{a} \times \mathbf{r})^2\mathbf{a}\end{aligned}$$

其次

$$\begin{aligned}\nabla \times (\mathbf{a} \times \mathbf{r})^2(\mathbf{a} \times \mathbf{r}_c) &= \nabla(\mathbf{a} \times \mathbf{r})^2 \times (\mathbf{a} \times \mathbf{r}_c) \\ &= (2\mathbf{a}^2\mathbf{r} - 2(\mathbf{a} \cdot \mathbf{r})\mathbf{a}) \times (\mathbf{a} \times \mathbf{r}) \quad (4\text{-}22\text{-}2, \text{例 } 14) \\ &= 2\mathbf{a}^2\mathbf{r} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{r}) - 2(\mathbf{a} \cdot \mathbf{r})\mathbf{a} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{r}) \\ &= 2\mathbf{a}^2\mathbf{a}r^2 - 2\mathbf{r}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{r})\mathbf{a}^2 - 2(\mathbf{a} \cdot \mathbf{r})[\mathbf{a}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}) - \mathbf{r}\mathbf{a}^2] \\ &= 2\mathbf{a}(\mathbf{a}^2\mathbf{r}^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{r})^2) \\ &= 2\mathbf{a}[(\mathbf{a} \times \mathbf{r}) \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{r})]\end{aligned}$$

$$= 2a(a \times \mathbf{r})^2$$

故

$$\text{rot}\mathbf{p} = 4(\mathbf{a} \times \mathbf{r})^2\mathbf{a}$$

4-22-4 关于矢量方向导数的运算例题

例 1 设 $\mathbf{a}$ = 常矢量,证明

$$(\mathbf{a} \cdot \nabla)\mathbf{b} = \text{grad}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) - \mathbf{a} \times \text{rot}\mathbf{b}$$

证:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \times \text{rot}\mathbf{b} &= \mathbf{a} \times [\nabla \times \mathbf{b}] \\ &= \nabla(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) - (\mathbf{a} \cdot \nabla)\mathbf{b} \\ &= \text{grad}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) - (\mathbf{a} \cdot \nabla)\mathbf{b} \end{aligned}$$

移项后即得所需结果。

例 2 证明

$$(\mathbf{b} \cdot \nabla)\varphi\mathbf{a} = \mathbf{a}(\mathbf{b} \cdot \text{grad}\varphi) + \varphi(\mathbf{b} \cdot \nabla)\mathbf{a}$$

证:

$$\begin{aligned} (\mathbf{b} \cdot \nabla)\varphi\mathbf{a} &= (\mathbf{b} \cdot \nabla)\varphi_c\mathbf{a} + (\mathbf{b} \cdot \nabla)\varphi\mathbf{a}_c \\ &= \varphi_c(\mathbf{b} \cdot \nabla)\mathbf{a} + \mathbf{a}_c(\mathbf{b} \cdot \nabla\varphi) \\ &= \varphi(\mathbf{b} \cdot \nabla)\mathbf{a} + \mathbf{a}(\mathbf{b} \cdot \text{grad}\varphi) \end{aligned}$$

例 3 证明

$$(\mathbf{c} \cdot \nabla)(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{a} \times (\mathbf{c} \cdot \nabla)\mathbf{b} - \mathbf{b} \times (\mathbf{c} \cdot \nabla)\mathbf{a}$$

证:

$$\begin{aligned} (\mathbf{c} \cdot \nabla)(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) &= (\mathbf{c} \cdot \nabla)(\mathbf{a}_c \times \mathbf{b}) + (\mathbf{c} \cdot \nabla)(\mathbf{a} \times \mathbf{b}_c) \\ &= \mathbf{a}_c \times (\mathbf{c} \cdot \nabla)\mathbf{b} - \mathbf{b}_c \times (\mathbf{c} \cdot \nabla)\mathbf{a} \\ &= \mathbf{a} \times (\mathbf{c} \cdot \nabla)\mathbf{b} - \mathbf{b} \times (\mathbf{c} \cdot \nabla)\mathbf{a} \end{aligned}$$

4-22-5 其他类型的例题

例 1 证明

$$(\mathbf{a} \times \nabla) \times \mathbf{b} = (\mathbf{a} \cdot \nabla)\mathbf{b} + \mathbf{a} \times \text{rot}\mathbf{b} - \mathbf{a}\text{div}\mathbf{b}$$

证:

$$(\mathbf{a} \times \nabla) \times \mathbf{b} = \nabla(\mathbf{a}_c \cdot \mathbf{b}) - \mathbf{a}(\nabla \cdot \mathbf{b})$$

$$= \mathbf{a}\times(\nabla\times\mathbf{b}) + (\mathbf{a}\cdot\nabla)\mathbf{b} - \mathbf{a}\,\mathrm{div}\,\mathbf{b}$$

$$= (\mathbf{a}\cdot\nabla)\mathbf{b} + \mathbf{a}\times\mathrm{rot}\,\mathbf{b} - \mathbf{a}\,\mathrm{div}\,\mathbf{b}$$

例 2 证明

$$(\mathbf{a}\times\nabla)\times\mathbf{r} = -2\mathbf{a}$$

证：将 $\mathbf{b}=\mathbf{r}$ 代入例 1 之结果中，得

$$(\mathbf{a}\times\nabla)\times\mathbf{r} = (\mathbf{a}\cdot\nabla)\mathbf{r} + \mathbf{a}\times\mathrm{rot}\,\mathbf{r} - \mathbf{a}\,\mathrm{div}\,\mathbf{r}$$

$$= \mathbf{a} - 3\mathbf{a} \quad (\text{用辅助公式 } 6,7,9)$$

$$= -2\mathbf{a}$$

例 3 证明

$$(\nabla\times\mathbf{a})\times\mathbf{b} = -(\mathbf{a}\cdot\nabla)\mathbf{b} - \mathbf{a}\times\mathrm{rot}\,\mathbf{b} + \mathrm{rot}(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) + \mathbf{a}\,\mathrm{div}\,\mathbf{b}$$

证：

$$(\nabla\times\mathbf{a})\times\mathbf{b} = (\nabla\times\mathbf{a}_c)\times\mathbf{b} + (\nabla\times\mathbf{a})\times\mathbf{b}_c$$

$$= -(\mathbf{a}_c\times\nabla)\times\mathbf{b} + \mathrm{rot}\,\mathbf{a}\times\mathbf{b}$$

$$= -(\mathbf{a}\times\nabla)\times\mathbf{b} + \mathrm{rot}\,\mathbf{a}\times\mathbf{b}$$

$$= -\mathbf{a}\times\mathrm{rot}\,\mathbf{b} - (\mathbf{a}\cdot\nabla)\mathbf{b} + \mathbf{a}\,\mathrm{div}\,\mathbf{b} + \mathrm{rot}\,\mathbf{a}\times\mathbf{b} \quad (\text{用例 1 结果})$$

例 4 证明

$$(\mathbf{a}\cdot\nabla)\mathbf{a} = \frac{1}{2}\nabla(\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}) - \mathbf{a}\times\mathrm{rot}\,\mathbf{a}$$

证：因为 $(\mathbf{a}\cdot\nabla)\mathbf{a} = (\mathbf{a}_c\cdot\nabla)\mathbf{a}$，所以利用公式

$$(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})\mathbf{C} = -\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) + \mathbf{B}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C})$$

得

$$(\mathbf{a}\cdot\nabla)\mathbf{a} = -\mathbf{a}\times(\nabla\times\mathbf{a}) + \nabla(\mathbf{a}_c\cdot\mathbf{a})$$

$$= -\mathbf{a}\times\mathrm{rot}\,\mathbf{a} + \frac{1}{2}\nabla(\mathbf{a}\cdot\mathbf{a})$$

例 5 证明

$$\nabla\times\mathbf{p} - (\nabla\cdot\mathrm{rot}\,\mathbf{p})\mathbf{r} = 0$$

证：

$$\nabla\times\mathbf{p} - (\nabla\cdot\mathrm{rot}\,\mathbf{p})\mathbf{r}$$

$$= \nabla \times \mathbf{p} - (\nabla \cdot (\mathrm{rot}\mathbf{p})_c)\mathbf{r} - (\nabla \cdot \mathrm{rot}\mathbf{p})\mathbf{r}_c$$

$$= \mathrm{rot}\mathbf{p} - (\mathrm{rot}\mathbf{p} \cdot \nabla)\mathbf{r} - \mathbf{r}\,\mathrm{div}\,\mathrm{rot}\mathbf{p}$$

$$= \mathrm{rot}\mathbf{p} - \mathrm{rot}\mathbf{p} = 0$$

因为 $(\mathrm{rot}\mathbf{p} \cdot \nabla)\mathbf{r} = \mathrm{rot}\mathbf{p}$, $\mathrm{div}\,\mathrm{rot}\mathbf{p} = 0$。

例 6 设 $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$, $\boldsymbol{\omega}$ = 常矢量,证明

$$\mathrm{grad}\mathbf{v}^2 = \mathbf{v} \times \mathrm{rot}\mathbf{v}$$

证:

$$\begin{aligned}
\mathrm{grad}\mathbf{v}^2 &= \mathrm{grad}(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})^2 \\
&= \mathrm{grad}(\boldsymbol{\omega}^2\mathbf{r}^2 - (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r})^2) \\
&= \nabla(\omega^2 r^2 - (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r})^2) \\
&= \omega^2 \nabla r^2 - \nabla(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r})^2 \\
&= 2\omega^2 \mathbf{r} - 2(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r})\nabla(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}) \\
&= 2\omega^2 \mathbf{r} - 2(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r})\boldsymbol{\omega} \\
&= 2(\omega^2 \mathbf{r} - (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r})\boldsymbol{\omega})
\end{aligned}$$

另一方面

$$\begin{aligned}
\mathbf{v} \times \mathrm{rot}\mathbf{v} &= (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \times [\nabla \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})] \\
&= (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \times (\boldsymbol{\omega}(\nabla \cdot \mathbf{r}) - (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla)\mathbf{r}) \\
&= (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \times (3\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}) \\
&= (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \times 2\boldsymbol{\omega} \\
&= 2(\omega^2 \mathbf{r} - (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r})\boldsymbol{\omega})
\end{aligned}$$

与 $\mathrm{grad}\mathbf{v}^2$ 比较即得证。

例 7 设 $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$, $\boldsymbol{\omega}$ 为常矢量,证明

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = \frac{1}{2}\mathrm{rot}\mathbf{v} \times \mathbf{v}$$

证:由例 4、6 得

$$\begin{aligned}
(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} &= \frac{1}{2}\nabla(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) - \mathbf{v} \times \mathrm{rot}\mathbf{v} \\
&= \frac{1}{2}\mathrm{grad}\mathbf{v}^2 - \mathbf{v} \times \mathrm{rot}\mathbf{v} \\
&= \frac{1}{2}\mathbf{v} \times \mathrm{rot}\mathbf{v} - \mathbf{v} \times \mathrm{rot}\mathbf{v}
\end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{2}\mathbf{v}\times \mathrm{rot}\mathbf{v}$$

$$= \frac{1}{2}\mathrm{rot}\mathbf{v}\times\mathbf{v}$$

例 8 设 $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ 为矢量场，证明

$$\mathrm{grad}(\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})) = (\mathbf{a}\times\mathbf{b})\mathrm{div}\mathbf{c} + (\mathbf{b}\times(\mathbf{a}\cdot\nabla)\mathbf{c}) - (\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\cdot\nabla)\mathbf{c}) + \mathrm{cycl}$$

式中，cycl 表示将 $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ 作循环置换而得的其他两组表达式。

证：

由 4-22-1 节的例 11 知，

$$\mathrm{grad}[\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})] = [(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\nabla]\mathbf{c} + (\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathrm{rot}\mathbf{c} + \mathrm{cycl}$$

由下列可知：

$$[(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\nabla]\mathbf{c} = (\mathbf{a}\times\mathbf{b})\mathrm{div}\mathbf{c} - [\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\cdot\nabla)\mathbf{c}] + \mathbf{b}\times(\mathbf{a}\cdot\nabla)\mathbf{c} + \mathrm{rot}\mathbf{c}\times(\mathbf{a}\times\mathbf{b})$$

将其代入上式，即得所需结果。

例 9 证明

$$[(\mathbf{b}\times\mathbf{c})\cdot\nabla]\mathbf{a} = (\mathbf{b}\times\mathbf{c})\mathrm{div}\mathbf{a} - [\mathbf{b}\times(\mathbf{c}\cdot\nabla)\mathbf{a}] + \mathbf{c}\times(\mathbf{b}\cdot\nabla)\mathbf{a} + \mathrm{rot}\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$$

证：

$$\begin{aligned}[(\mathbf{b}\times\mathbf{c})\cdot\nabla]\mathbf{a} &= [(\mathbf{b}_c\times\mathbf{c}_c)\cdot\nabla]\mathbf{a}\\ &= \nabla\times[\mathbf{a}\times(\mathbf{b}_c\times\mathbf{c}_c)] + (\mathbf{b}_c\times\mathbf{c}_c)(\nabla\cdot\mathbf{a})\\ &= (\mathbf{b}\times\mathbf{c})\mathrm{div}\mathbf{a} + \nabla\times[\mathbf{a}\times(\mathbf{b}_c\times\mathbf{c}_c)]\end{aligned}$$

我们得到了所要求证等式右边的第一项及 $\nabla\times[\mathbf{a}\times(\mathbf{b}_c\times\mathbf{c}_c)]$。

现从 $\nabla\times[\mathbf{a}\times(\mathbf{b}_c\times\mathbf{c}_c)]$ 逐步化出第二、三、四项。

$$\begin{aligned}&\nabla\times[\mathbf{a}\times(\mathbf{b}_c\times\mathbf{c}_c)]\\ &= \nabla\times(\mathbf{b}_c(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}_c) - \mathbf{c}_c(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}_c))\\ &= \nabla\times\mathbf{b}_c(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}_c) - \nabla\times\mathbf{c}_c(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}_c)\end{aligned}$$

但

$$\nabla\times\mathbf{b}_c(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}_c) = \nabla(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}_c)\times\mathbf{b}_c$$

$$= [\mathbf{c}_c \times (\nabla \times \mathbf{a}) + (\mathbf{c}_c \cdot \nabla)\mathbf{a}] \times \mathbf{b}_c$$
$$= -\mathbf{b}_c \times (\mathbf{c}_c \cdot \nabla)\mathbf{a} + [\mathbf{c}_c \times (\nabla \times \mathbf{a})] \times \mathbf{b}_c$$
$$= -\mathbf{b} \times (\mathbf{c} \cdot \nabla)\mathbf{a} + [\mathbf{c}_c \times (\nabla \times \mathbf{a})] \times \mathbf{b}_c$$

此处得到了等式右边的第二项及 $[\mathbf{c}_c \times (\nabla \times \mathbf{a})] \times \mathbf{b}_c$。又

$$-\nabla \times \mathbf{c}_c(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}_c) = -\nabla(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}_c) \times \mathbf{c}_c$$
$$= -[\mathbf{b}_c \times (\nabla \times \mathbf{a}) + (\mathbf{b}_c \cdot \nabla)\mathbf{a}] \times \mathbf{c}_c$$
$$= -[\mathbf{b}_c \times (\nabla \times \mathbf{a})] \times \mathbf{c}_c - (\mathbf{b}_c \cdot \nabla)\mathbf{a} \times \mathbf{c}_c$$
$$= \mathbf{c}_c \times (\mathbf{b}_c \cdot \nabla)\mathbf{a} - [\mathbf{b}_c \times (\nabla \times \mathbf{a})] \times \mathbf{c}_c$$
$$= \mathbf{c} \times (\mathbf{b} \cdot \nabla)\mathbf{a} - [\mathbf{b}_c \times (\nabla \times \mathbf{a})] \times \mathbf{c}_c$$

此处得到了等式右边的第三项及 $-[\mathbf{b}_c \times (\nabla \times \mathbf{a})] \times \mathbf{c}_c$。现将多出的两项合并：

$$[\mathbf{c}_c \times (\nabla \times \mathbf{a})] \times \mathbf{b}_c - [\mathbf{b}_c \times (\nabla \times \mathbf{a})] \times \mathbf{c}_c$$
$$= (\nabla \times \mathbf{a})(\mathbf{b}_c \cdot \mathbf{c}_c) - \mathbf{c}_c[(\nabla \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b}_c]$$
$$- (\nabla \times \mathbf{a})(\mathbf{b}_c \cdot \mathbf{c}_c) + \mathbf{b}_c[(\nabla \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{c}_c]$$
$$= \mathbf{b}_c[(\nabla \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{c}_c) - \mathbf{c}_c[(\nabla \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b}_c)]$$
$$= [(\nabla \times \mathbf{a}) \times (\mathbf{b}_c \times \mathbf{c}_c)]$$
$$= [\mathrm{rot}\mathbf{a} \times (\mathbf{b}_c \times \mathbf{c}_c)]$$
$$= \mathrm{rot}\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$$

此即所需之第四项。

4-23 积分关系式

利用公式(见式(4-60))

$$\int_V T(\overset{\nabla}{\smile})dV = \int_S T(\mathbf{n})dS$$

可以得到一系列积分关系式，现举例如下：

例 1 取 $T(\nabla) = \nabla\varphi = \nabla\varphi = \mathrm{grad}\varphi$，即得

$$\int_V \mathrm{grad}\varphi dV = \int_V \nabla\varphi dV = \int_S \mathbf{n}\varphi dS$$

例 2 取 $T(\nabla) = \nabla \cdot \mathbf{a} = \nabla \cdot \mathbf{a} = \mathrm{div}\mathbf{a}$，即得

$$\int_V \mathrm{div}\mathbf{a}dV = \int_V \nabla\cdot\mathbf{a}dV = \int_S \mathbf{n}\cdot\mathbf{a}dS$$

例 3 取 $T(\bigtriangledown) = \bigtriangledown\times\mathbf{a} = \nabla\times\mathbf{a} = \mathrm{rot}\mathbf{a}$，即得

$$\int_V \mathrm{rot}\mathbf{a}d\mathbf{V} = \int_V \nabla\times\mathbf{a}dV = \int_S \mathbf{n}\times\mathbf{a}dS$$

例 4 取 $T(\bigtriangledown) = \bigtriangledown\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) = \nabla\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) = \mathrm{div}(\mathbf{a}\times\mathbf{b})$，即得

$$\int_V \mathrm{div}(\mathbf{a}\times\mathbf{b})dV = \int_V \nabla\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b})dV = \int_S \mathbf{n}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b})dS$$

例 5 取 $T(\bigtriangledown) = \bigtriangledown\times(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) = \nabla\times(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) = \mathrm{rot}(\mathbf{a}\times\mathbf{b})$，即得

$$\int_V \mathrm{rot}(\mathbf{a}\times\mathbf{b})dV = \int_V \nabla\times(\mathbf{a}\times\mathbf{b})dV$$

$$= \int_S \mathbf{n}\times(\mathbf{a}\times\mathbf{b})dS$$

例 6 取 $T(\bigtriangledown) = (\mathbf{a}_c\cdot\bigtriangledown)\mathbf{b} = (\mathbf{a}\cdot\nabla)\mathbf{b}$，即得

$$\int_V (\mathbf{a}\cdot\nabla)\mathbf{b}dV = \int_V (\mathbf{a}_c\cdot\bigtriangledown)\mathbf{b}dV = \int_S (\mathbf{a}\cdot\mathbf{n})\mathbf{b}dS$$

这个积分关系式左右两边的 $\mathbf{a}$ 在积分时必须视为常数，这是由 $T(\bigtriangledown) = (\mathbf{a}_c\cdot\bigtriangledown)\mathbf{b}$ 的定义所决定的。如果取 $T(\bigtriangledown) = (\mathbf{a}\cdot\bigtriangledown)\mathbf{b}$，即 $\mathbf{a}$ 在积分时也当作被积函数，此时

$$\begin{aligned}(\mathbf{a}\cdot\bigtriangledown)\mathbf{b} &= (\bigtriangledown\cdot\mathbf{a})\mathbf{b} = (\bigtriangledown\cdot\mathbf{a}_c)\mathbf{b} + (\bigtriangledown\cdot\mathbf{a})\mathbf{b}_c \\ &= (\mathbf{a}_c\cdot\bigtriangledown)\mathbf{b} + \mathbf{b}_c(\bigtriangledown\cdot\mathbf{a}) \\ &= (\mathbf{a}_c\cdot\nabla)\mathbf{b} + \mathbf{b}\mathrm{div}\mathbf{a}\end{aligned}$$

于是

$$\int_V (\mathbf{a}_c\cdot\nabla)\mathbf{b}dV + \int_V \mathbf{b}\mathrm{div}\mathbf{a}dV = \int_S (\mathbf{n}\cdot\mathbf{a})\mathbf{b}dS$$

即

$$\int_V (\mathbf{a}\cdot\nabla)\mathbf{b}dV = -\int_V \mathbf{b}\mathrm{div}\mathbf{a}dV + \int_S (\mathbf{n}\cdot\mathbf{a})\mathbf{b}dS$$

此时等式左边积分中的 $\mathbf{a}$ 在积分时视为常数，而右边两个积分中的 $\mathbf{a}$ 在积分时都是被积函数。

下面来推导几个有关线积分的积分关系式。通常，这些线积分关系式称作斯托克斯定理。

首先，我们引用矢量场论中的斯托克斯定理：

$$\int_S \mathbf{n}\cdot \mathrm{rot}\mathbf{a}dS=\int_l \mathbf{a}\cdot d\mathbf{l}$$

式中：$\mathbf{a}$ 为矢量函数；l 为封闭环路；S 为张于环路上的曲面；dS 为面积元；$d\mathbf{l}$ 为沿环路方向的线积分元。环路方向与曲面上任一点的单位法矢量 $\mathbf{n}$ 成右手螺旋关系。

现在分别来证明几个常用的公式。

公式 1

$$\int_l \varphi d\mathbf{l}=\int_S \mathbf{n}\times \mathrm{grad}\varphi dS$$

$$=\int_S(\mathbf{n}\times\nabla)\varphi dS$$

证：令 $\mathbf{g}$ 为任意常矢量，则

$$\mathbf{g}\cdot\int_l\varphi d\mathbf{l}=\int_l \mathbf{g}\cdot\varphi d\mathbf{l}=\int_l(\varphi\mathbf{g})\cdot d\mathbf{l}$$

$$=\int_S \mathrm{rot}(\varphi\mathbf{g})\cdot\mathbf{n}dS$$

$$=\int_S\mathbf{n}\cdot(\nabla\times\varphi\mathbf{g})dS$$

$$=\int_S\mathbf{n}\cdot(\nabla\varphi\times\mathbf{g})dS$$

$$=\int_S\mathbf{g}\cdot(\mathbf{n}\times\nabla\varphi)dS$$

$$=\mathbf{g}\cdot\int_S(\mathbf{n}\times\nabla\varphi)dS$$

由于 $\mathbf{g}$ 是任意常矢量，因此

$$\int\varphi d\mathbf{l}=\int_S(\mathbf{n}\times\nabla\varphi)dS=\int_S\mathbf{n}\times\mathrm{grad}\varphi dS$$

$$=\int_S(\mathbf{n}\times\nabla)\varphi dS$$

公式 2

$$\int_l \mathbf{a} \times d\mathbf{l} = -\int_S (\mathbf{n} \times \nabla) \times \mathbf{a} dS$$

证:

$$\int_l \mathbf{a} \times d\mathbf{l} = \int_l (a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}) \times d\mathbf{l}$$

$$= \mathbf{i} \times \int_l a_x d\mathbf{l} + \mathbf{j} \times \int_l a_y d\mathbf{l} + \mathbf{k} \times \int_l a_z d\mathbf{l}$$

$$= \mathbf{i} \times \int_S (\mathbf{n} \times \nabla) a_x dS + \mathbf{j} \times \int_S (\mathbf{n} \times \nabla) a_y dS$$

$$+ \mathbf{k} \int_S (\mathbf{n} \times \nabla) a_z dS$$

$$= -\int_S (\mathbf{n} \times \nabla) \times (a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}) dS$$

$$= -\int_S (\mathbf{n} \times \nabla) \times \mathbf{a} dS$$

公式 3

$$\int_l \varphi \operatorname{grad} b \cdot d\mathbf{l} = \int_S (\operatorname{grad}\varphi \times \operatorname{grad} b) \cdot \mathbf{n} dS$$

$$= -\int_l b \operatorname{grad}\varphi \cdot d\mathbf{l}$$

证:

$$\int_l \varphi \operatorname{grad} b \cdot d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{n} \cdot \operatorname{rot}(\varphi \operatorname{grad} b) dS \text{(斯托克斯定理)}$$

$$= \int_S \mathbf{n} \cdot [\nabla \times (\varphi \operatorname{grad} b)] dS$$

$$= \int_S \mathbf{n} \cdot [\nabla\varphi \times (\operatorname{grad} b)_c] dS$$

$$+ \int_S \mathbf{n} \cdot [\nabla \times \operatorname{grad} b] \varphi_c dS$$

因

$$\nabla \times \operatorname{grad} b = \operatorname{rot} \operatorname{grad} b = 0$$

(见下节)故

$$\int_l \varphi \operatorname{grad} b \cdot d\mathbf{l} = \int_S [\operatorname{grad}\varphi \times \operatorname{grad} b] \cdot \mathbf{n} dS$$

将式中的 φ, b 对换,即得

$$\int_s [\mathrm{grad}\varphi \times \mathrm{grad} b] \cdot \mathbf{n} dS = -\int_l b \mathrm{grad}\varphi \cdot d\mathbf{l}$$

所以

$$\int_l \varphi \mathrm{grad} b \cdot d\mathbf{l} = \int_s [\mathrm{grad}\varphi \times \mathrm{grad} b] \cdot \mathbf{n} dS$$

$$= -\int_l b \mathrm{grad}\varphi \cdot d\mathbf{l}$$

公式 4

$$\int_l (\mathbf{a} \cdot d\mathbf{l}) \mathrm{grad} b = \int_s [(\mathbf{n} \times \nabla) \cdot \mathbf{a}] \mathrm{grad} b dS$$

证：令 $\mathbf{c}$ 为任意常矢量,则

$$\mathbf{c} \cdot \int_l (\mathbf{a} \cdot d\mathbf{l}) \mathrm{grad} b = \int_l (\mathbf{a} \cdot d\mathbf{l})(\mathbf{c} \cdot \mathrm{grad} b)$$

$$= \int_s [\nabla \times (\mathbf{c} \cdot \mathrm{grad} b)\mathbf{a}] \cdot \mathbf{n} dS$$

$$= \int_s \mathbf{n} \cdot [\nabla \times \mathbf{a}(\mathbf{c} \cdot \mathrm{grad} b)] dS$$

$$= \int_s [(\mathbf{n} \times \nabla) \cdot \mathbf{a}](\mathbf{c} \cdot \mathrm{grad} b) dS$$

$$= \mathbf{c} \cdot \int_s [(\mathbf{n} \times \nabla) \cdot \mathbf{a}] \mathrm{grad} b dS$$

因 $\mathbf{c}$ 为任意常矢量,故最后得

$$\int_l (\mathbf{a} \cdot d\mathbf{l}) \mathrm{grad} b = \int_s [(\mathbf{n} \times \nabla) \cdot \mathbf{a}] \mathrm{grad} b dS$$

注意,这里 $\mathrm{grad} b$ 在 $T(\nabla)$ 内,故要微分,即受∇作用,积分式中不可看成是 $(\mathbf{n} \times \nabla) \cdot \mathbf{a}$ 和 $\mathrm{grad} b$ 的乘积。实际上

$$[(\mathbf{n} \times \nabla) \cdot \mathbf{a}] \mathrm{grad} b$$

$$= [(\mathbf{n} \times \nabla) \cdot \mathbf{a}](\mathrm{grad} b)_c + [(\mathbf{n} \times \nabla) \cdot \mathbf{a}_c] \mathrm{grad} b$$

$$= \mathrm{grad} b[(\mathbf{n} \times \nabla) \cdot \mathbf{a}] + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{n} \times \nabla) \mathrm{grad} b$$

4-24　二重∇算子的定义[5]

在矢量函数运算过程中，经常会碰到 $\mathrm{div}\,\mathrm{grad}\varphi(\nabla \cdot \nabla\varphi)$,

rot gradφ($\nabla \times \nabla\varphi$), grad div$\mathbf{R}$($\nabla(\nabla \cdot \mathbf{R})$), div rot$\mathbf{R}$ ($\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{R})$) 和 rot rot$\mathbf{R}$($\nabla \times (\nabla \times \mathbf{R})$)($\varphi$, $\mathbf{R}$ 为标量场及矢量场)等函数. 为了处理这些函数，需要引入二重∇算子概念. 我们先给出含有二重∇的表达式的意义，然后再研究它的性质，最后通过具体例题来介绍其运算方法.

定义 对在一个表达式中含有两个∇和对每个∇分别为线性的表达式 $T(\nabla,\nabla)$，可理解如下:

(1) 先将一个∇看作固定的矢量，例如将前一个∇看作固定的矢量 $\mathbf{p}$，再按一般定义（例如第二定义）理解 $T(\mathbf{p},\nabla)$. 这里 $T(\mathbf{p},\nabla)$ 简写为 $T_1(\mathbf{p})$.

(2) 在 $T_1(\mathbf{p})$ 中将 $\mathbf{p}$ 换成∇，再按一般定义来理解 $T_1(\nabla)$，所得结果即为 $T(\nabla,\nabla)$.

具体来说，设给定一含有两个∇的表达式 $T(\nabla,\nabla)$，则按照定义先将一个∇换成固定矢量 $\mathbf{p}$，然后再按定义写出 $T(\mathbf{p},\nabla)$ 的表达式:

$$
\begin{aligned}
T_1(\mathbf{p}) &= T(\mathbf{p},\nabla) \\
&= \frac{\partial}{\partial x} T(\mathbf{p},\mathbf{i}) + \frac{\partial}{\partial y} T(\mathbf{p},\mathbf{j}) + \frac{\partial}{\partial z} T(\mathbf{p},\mathbf{k})
\end{aligned}
$$

于是

$$
\begin{aligned}
T(\nabla,\nabla) &= T_1(\nabla) \\
&= \frac{\partial}{\partial x} T_1(\mathbf{i}) + \frac{\partial}{\partial y} T_1(\mathbf{j}) + \frac{\partial}{\partial z} T_1(\mathbf{k}) \\
&= \frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{\partial}{\partial x} T(\mathbf{i},\mathbf{i}) + \frac{\partial}{\partial y} T(\mathbf{i},\mathbf{j}) + \frac{\partial}{\partial z} T(\mathbf{i},\mathbf{k})\right\} \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{\partial}{\partial x} T(\mathbf{j},\mathbf{i}) + \frac{\partial}{\partial y} T(\mathbf{j},\mathbf{j}) + \frac{\partial}{\partial z} T(\mathbf{j},\mathbf{k})\right\} \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial z}\left\{\frac{\partial}{\partial x} T(\mathbf{k},\mathbf{i}) + \frac{\partial}{\partial y} T(\mathbf{k},\mathbf{j}) + \frac{\partial}{\partial z} T(\mathbf{k},\mathbf{k})\right\} \\
&= \frac{\partial^2}{\partial x^2} T(\mathbf{i},\mathbf{i}) + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} T(\mathbf{i},\mathbf{j}) + \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} T(\mathbf{i},\mathbf{k})
\end{aligned}
$$

$$+\frac{\partial^2}{\partial y\partial x}T(\mathbf{j},\mathbf{i})+\frac{\partial^2}{\partial y^2}T(\mathbf{j},\mathbf{j})+\frac{\partial^2}{\partial y\partial z}T(\mathbf{j},\mathbf{k})$$

$$+\frac{\partial^2}{\partial z\partial x}T(\mathbf{k},\mathbf{i})+\frac{\partial^2}{\partial z\partial y}T(\mathbf{k},\mathbf{j})+\frac{\partial^2}{\partial z^2}T(\mathbf{k},\mathbf{k})$$

因

$$\frac{\partial^2}{\partial y\partial x}=\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\qquad\frac{\partial^2}{\partial y\partial z}=\frac{\partial^2}{\partial z\partial y}\qquad\frac{\partial^2}{\partial x\partial z}=\frac{\partial^2}{\partial z\partial x}$$

故上式又能写成

$$\begin{aligned}T(\nabla,\nabla)=&\frac{\partial^2}{\partial x^2}T(\mathbf{i},\mathbf{i})+\frac{\partial^2}{\partial y^2}T(\mathbf{j},\mathbf{j})+\frac{\partial^2}{\partial z^2}T(\mathbf{k},\mathbf{k})\\&+\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}[T(\mathbf{i},\mathbf{j})+T(\mathbf{j},\mathbf{i})]\\&+\frac{\partial^2}{\partial y\partial z}[T(\mathbf{j},\mathbf{k})+T(\mathbf{k},\mathbf{j})]\\&+\frac{\partial^2}{\partial z\partial x}[T(\mathbf{k},\mathbf{i})+T(\mathbf{i},\mathbf{k})]\end{aligned}\tag{4-66}$$

这个表达式可以直接看成是 $T(\nabla,\nabla)$ 的定义。上述两步骤主要说明这个结果是怎样得来的，而下面的例题则说明这样定义的目的是为了建立 $T(\nabla,\nabla)$和 div gradφ 等函数之间的简单联系。这样，我们就可以先把某一函数用某一 $T(\nabla,\nabla)$ 来表示，然后利用 $T(\nabla,\nabla)$ 的性质进行运算，最终再回到普通矢量函数表达式上来，从而完成运算的过程。

下面先通过具体例子来说明 $T(\nabla,\nabla)$ 的含意。

例 1 试说明 $T(\nabla,\nabla)=(\nabla\cdot\nabla)\varphi$ 的含义。

按上述 $T(\nabla,\nabla)$ 的定义，

$$\begin{aligned}T_1(\mathbf{p})=(\mathbf{p}\cdot\nabla)\varphi=(\mathbf{p}\cdot\nabla\varphi)\\=\mathbf{p}\cdot\mathrm{grad}\varphi\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}T(\nabla,\nabla)=T_1(\nabla)=\nabla\cdot\mathrm{grad}\varphi\\=\mathrm{div\ grad}\varphi=(\nabla\cdot\nabla)\varphi\end{aligned}$$

由此可见

$$(\nabla \cdot \nabla)\varphi = \mathrm{div\,grad}\varphi = \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\nabla}\varphi = (\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\nabla})\varphi$$

通常（$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\nabla}$）用 $\boldsymbol{\nabla}^2$ 或 Δ 表示，因此

$$(\nabla \cdot \nabla)\varphi = \mathrm{div\,grad}\varphi = \boldsymbol{\nabla}^2\varphi = \Delta^2\varphi$$

例 2 试说明 $T(\nabla,\nabla) = \nabla \times \nabla\varphi$ 的含义。

按上述 $T(\nabla,\nabla)$ 的定义，

$$T_1(\mathbf{p}) = \mathbf{p} \times \nabla\varphi = \mathbf{p} \times \mathrm{grad}\varphi$$

$$T(\nabla,\nabla) = T_1(\nabla) = \nabla \times \mathrm{grad}\varphi = \mathrm{rot\,grad}\varphi$$
$$= \boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla}\varphi)$$

由此可见，

$$\nabla \times \nabla\varphi = \mathrm{rot\,grad}\varphi = \boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla}\varphi)$$

例 3 试说明 $T(\nabla,\nabla) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{R})$ 的含义。

按上述 $T(\nabla,\nabla)$ 的定义，

$$T_1(\mathbf{p}) = \mathbf{p}(\nabla \cdot \mathbf{R}) = \mathbf{p}\mathrm{div}\mathbf{R}$$

$$T(\nabla,\nabla) = T_1(\nabla) = \nabla\mathrm{div}\mathbf{R} = \mathrm{grad\,div}\mathbf{R}$$

由此可见，

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{R}) = \mathrm{grad\,div}\mathbf{R} = \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{R})$$

例 4 试说明 $T(\nabla,\nabla) = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{R})$ 的含意。

按上述 $T(\nabla,\nabla)$ 的定义，

$$T_1(\mathbf{p}) = \mathbf{p} \cdot (\nabla \times \mathbf{R}) = \mathbf{p} \cdot \mathrm{rot}\mathbf{R}$$

$$T(\nabla,\nabla) = \nabla \cdot \mathrm{rot}\mathbf{R} = \mathrm{div\,rot}\mathbf{R}$$

由此可见，

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{R}) = \mathrm{div\,rot}\mathbf{R} = \boldsymbol{\nabla} \cdot (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{R})$$

例 5 试说明 $T(\nabla,\nabla) = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{R})$ 的含意。

按上述 $T(\nabla,\nabla)$ 的定义，

$$T_1(\mathbf{p}) = \mathbf{p} \times (\nabla \times \mathbf{R}) = \mathbf{p} \times \mathrm{rot}\mathbf{R}$$

$$T(\nabla,\nabla) = T_1(\nabla) = \nabla \times \mathrm{rot}\mathbf{R} = \mathrm{rot\,rot}\mathbf{R}$$

由此可见，

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{R}) = \mathrm{rot\,rot}\mathbf{R} = \boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{R})$$

例 6 试说明 $T(\nabla,\nabla) = (\nabla \cdot \nabla)\mathbf{R}$ 的含义。

按上述 $T(\nabla,\nabla)$ 的定义，

$$T_1(\mathbf{p}) = (\mathbf{p}\cdot\triangledown)\mathbf{R}$$
$$= \frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{p}\cdot\mathbf{i})\mathbf{R} + \frac{\partial}{\partial y}(\mathbf{p}\cdot\mathbf{j})\mathbf{R} + \frac{\partial}{\partial z}(\mathbf{p}\cdot\mathbf{k})\mathbf{R}$$

故

$$T(\triangledown,\triangledown) = T_1(\triangledown)$$
$$= \frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{i},\mathbf{i})\mathbf{R} + \frac{\partial}{\partial y}(\mathbf{i}\cdot\mathbf{j})\mathbf{R} + \frac{\partial}{\partial z}(\mathbf{i}\cdot\mathbf{k})\mathbf{R}\right\}$$
$$+ \frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{j}\cdot\mathbf{i})\mathbf{R} + \frac{\partial}{\partial y}(\mathbf{j}\cdot\mathbf{j})\mathbf{R}\right.$$
$$\left. + \frac{\partial}{\partial z}(\mathbf{j}\cdot\mathbf{k})\mathbf{R}\right\} + \frac{\partial}{\partial z}\left\{\frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{i})\mathbf{R}\right.$$
$$\left. + \frac{\partial}{\partial y}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{j})\mathbf{R} + \frac{\partial}{\partial z}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{k})\mathbf{R}\right\}$$

考虑到

$$(\mathbf{i}\cdot\mathbf{i}) = 1, (\mathbf{j}\cdot\mathbf{j}) = 1, (\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}) = 1$$
$$(\mathbf{i}\cdot\mathbf{j}) = (\mathbf{j}\cdot\mathbf{i}) = 0, (\mathbf{j}\cdot\mathbf{k}) = (\mathbf{k}\cdot\mathbf{j}) = 0$$
$$(\mathbf{k}\cdot\mathbf{i}) = (\mathbf{i}\cdot\mathbf{k}) = 0$$

最后得

$$(\triangledown\cdot\triangledown)\mathbf{R} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\mathbf{R} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\mathbf{R} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\mathbf{R} = \triangledown^2\mathbf{R}$$

这是一个与坐标系统无关的量，通常用 $\triangledown^2\mathbf{R}$ 表示。 与 $(\nabla\cdot\nabla)\mathbf{R} = \nabla^2\mathbf{R} = \Delta\mathbf{R}$ 的定义相比较，可见

$$\triangledown^2\mathbf{R} = \nabla^2\mathbf{R}$$

因此

$$(\triangledown\cdot\triangledown)\mathbf{R} = \nabla^2\mathbf{R}$$

以后在并矢微积中我们将从并矢观点再来讨论这个问题。

4-25　$T(\triangledown,\triangledown)$的性质

性质 1　对 $T(\triangledown,\triangledown)$ 可将 $\triangledown,\triangledown$ 看成普通矢量进行矢量代数恒等变换，所得结果不变。

证：$T(\nabla,\nabla)$ 经过变换后变为 $W(\nabla,\nabla)$ 意味着 $T(\mathbf{i},\mathbf{i})=W(\mathbf{i},\mathbf{i})$ 等，所以.

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}T(\mathbf{i},\mathbf{i})=\frac{\partial^2}{\partial x^2}W(\mathbf{i},\mathbf{i})\cdots$$

$$T(\nabla,\nabla)=\frac{\partial^2}{\partial x^2}T(\mathbf{i},\mathbf{i})+\cdots$$

$$=\frac{\partial^2}{\partial x^2}W(\mathbf{i},\mathbf{i})+\cdots$$

$$=W(\nabla,\nabla)$$

性质2 若 $T(\mathbf{p},\mathbf{q})=0$，则 $T(\nabla,\nabla)=0$，式中 $\mathbf{p}$，$\mathbf{q}$ 为任意两矢量场.

证：$T(\mathbf{p},\mathbf{q})=0$ 意味着 $T(\mathbf{i},\mathbf{i})=0,\cdots,T(\mathbf{i},\mathbf{j})=0$，等等，由表达式(4-66)直接可知

$$T(\nabla,\nabla)=0$$

性质3 若 $T(\mathbf{p},\mathbf{p})=0$，则 $T(\nabla,\nabla)=0$，式中 $\mathbf{p}$ 为任意矢量场.

证：考虑 $T(\mathbf{p}+\mathbf{q},\mathbf{p}+\mathbf{q})$，其中 $\mathbf{q}$ 为另一任意矢量场，由于 $T(\nabla,\nabla)$ 对∇，∇分别为线性，故可写成

$$T(\mathbf{p}+\mathbf{q},\mathbf{p}+\mathbf{q})=T(\mathbf{p},\mathbf{p}+\mathbf{q})+T(\mathbf{q},\mathbf{p}+\mathbf{q})$$
$$=T(\mathbf{p},\mathbf{p})+T(\mathbf{p},\mathbf{q})+T(\mathbf{q},\mathbf{p})+T(\mathbf{q},\mathbf{q})$$

根据假设 $T(\mathbf{p}+\mathbf{q},\mathbf{p}+\mathbf{q})=0$，$T(\mathbf{p},\mathbf{p})=0$，$T(\mathbf{q},\mathbf{q})=0$，因此，

$$T(\mathbf{p},\mathbf{q})+T(\mathbf{q},\mathbf{p})=0$$

即

$$T(\mathbf{i},\mathbf{j})+T(\mathbf{j},\mathbf{i})=0$$
$$T(\mathbf{j},\mathbf{k})+T(\mathbf{k},\mathbf{j})=0$$
$$T(\mathbf{k},\mathbf{i})+T(\mathbf{i},\mathbf{k})=0$$

由 $T(\nabla,\nabla)$ 的表达式直接可知

$$T(\nabla,\nabla)=0$$

性质4 $T(\nabla,\nabla)$之值与坐标系的选择无关.

证：按照 $T(\nabla,\nabla)$ 的定义，因 $T_1(\mathbf{p})=T(\mathbf{p},\nabla)$ 和 $T_1(\nabla)$ 都与坐标系无关，故 $T(\nabla,\nabla)=T_1(\nabla)$ 也与坐标系无关。

4-26 关于对 $T(\nabla,\nabla)$ 运算的例题

例 1 试写出 $(\nabla\cdot\nabla)\varphi$ 在直角坐标系中的表达式。

解：因为

$$(\mathbf{i},\mathbf{i})=1,\ (\mathbf{j}\cdot\mathbf{j})=1,\ (\mathbf{k}\cdot\mathbf{k})=1$$

$$(\mathbf{i}\cdot\mathbf{j})=0,\ (\mathbf{j}\cdot\mathbf{k})=0,\ (\mathbf{k}\cdot\mathbf{i})=0$$

按 $(\nabla,\nabla)\varphi$ 的定义，

$$(\nabla\cdot\nabla)\varphi=\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\mathbf{i}\cdot\mathbf{i})\varphi+\cdots$$

$$=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}$$

在数学中 $(\nabla\cdot\nabla)$ 以 ∇^2 或$\triangle$表示。以后凡碰到 ∇^2 或$\triangle$，都应理解为$(\nabla\cdot\nabla)$。

例 2 试写出 $(\nabla\cdot\nabla)\mathbf{R}$ ($\mathbf{R}$ 为矢量场) 在直角坐标系中的表达式。

解：与上例相同，仅将 φ 换成 $\mathbf{R}$ 即可：

$$(\nabla\cdot\nabla)\mathbf{R}=\frac{\partial^2\mathbf{R}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\mathbf{R}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\mathbf{R}}{\partial z^2}$$

即

$$\nabla^2\mathbf{R}=\triangle\mathbf{R}=\frac{\partial^2\mathbf{R}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\mathbf{R}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\mathbf{R}}{\partial z^2}$$

若将 $\mathbf{R}$ 写成 $\mathbf{R}=R_x\mathbf{i}+R_y\mathbf{j}+R_z\mathbf{k}$，则

$$\nabla^2\mathbf{R}=\triangle\mathbf{R}=\left(\frac{\partial^2R_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2R_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2R_x}{\partial z^2}\right)\mathbf{i}$$

$$+\left(\frac{\partial^2R_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2R_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2R_y}{\partial z^2}\right)\mathbf{j}$$

$$+\left(\frac{\partial^2R_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2R_z}{\partial y^2}+\frac{\partial^2R_z}{\partial z^2}\right)\mathbf{k}$$

$$= \triangle R_x\mathbf{i} + \triangle R_y\mathbf{j} + \triangle R_z\mathbf{k}$$

$$= \Delta R_x\mathbf{i} + \Delta R_y\mathbf{j} + \Delta R_z\mathbf{k}$$

例 3 证明 rot rot$\mathbf{R}$ = grad div$\mathbf{R}$ − $\nabla^2\mathbf{R}$。

证:

$$\begin{aligned}\text{rot rot}\mathbf{R} &= \bigtriangledown \times [\bigtriangledown \times \mathbf{R}] \\ &= \bigtriangledown(\bigtriangledown \cdot \mathbf{R}) - (\bigtriangledown \cdot \bigtriangledown)\mathbf{R} \\ &= \text{grad div}\mathbf{R} - \bigtriangledown^2\mathbf{R} \\ &= \text{grad div}\mathbf{R} - \nabla^2\mathbf{R}\end{aligned}$$

例 4 **证明** $\nabla^2\left(\frac{1}{r}\right) = \bigtriangledown^2\left(\frac{1}{r}\right) = 0$, $r \neq 0$。

证:

$$\begin{aligned}\nabla^2\left(\frac{1}{r}\right) = \bigtriangledown^2\left(\frac{1}{r}\right) &= (\bigtriangledown \cdot \bigtriangledown)\frac{1}{r} \\ &= \bigtriangledown \cdot \bigtriangledown\left(\frac{1}{r}\right) \\ &= \bigtriangledown \cdot \frac{-\mathbf{r}}{r^3} \\ &= -\frac{1}{r^3}\bigtriangledown \cdot \mathbf{r} - \mathbf{r} \cdot \nabla\frac{1}{r^3} \\ &= -\frac{3}{r^3} - \left(\mathbf{r} \cdot \frac{-3r^2\mathbf{r}}{r^6 r}\right) \\ &= -\frac{3}{r^3} + \frac{3}{r^3} \\ &= 0\end{aligned}$$

例 5 证明 div rot$\mathbf{R}$ = 0。

证:

$$\text{div rot}\mathbf{R} = \bigtriangledown \cdot (\bigtriangledown \times \mathbf{R})$$

但 $\mathbf{p} \cdot (\mathbf{p} \times \mathbf{R}) = (\mathbf{p} \times \mathbf{p}) \cdot \mathbf{R} = 0 \cdot \mathbf{R} = 0$，由性质 3 知，

$$\bigtriangledown \cdot (\bigtriangledown \times \mathbf{R}) = 0$$

即

$$\text{div rot}\mathbf{R} = 0$$

例 6 证明 rot gradφ = 0。

证：由于

$$\text{rot grad}\varphi = \nabla \times \nabla\varphi$$

但 $\mathbf{p} \times \mathbf{p}\varphi = 0$，由性质 3 知，

$$\nabla \times \nabla\varphi = 0$$

即

$$\text{rot grad}\varphi = 0$$

例 7 若 $\text{div}\mathbf{a} = 0$，则 $\text{rot rot rot rot}\mathbf{a} = \nabla^2(\nabla^2\mathbf{a})$

证：由于

$$\text{rot rot}\mathbf{a} = \text{grad div }\mathbf{a} - \nabla^2\mathbf{a}$$

但已知 $\text{div}\mathbf{a} = 0$，故

$$\text{rot rot}\mathbf{a} = -\nabla^2\mathbf{a}$$

于是

$$\begin{aligned}\text{rot rot (rot rot}\mathbf{a}) &= -\text{rot rot}(\nabla^2\mathbf{a}) \\ &= -\text{grad div}(\nabla^2\mathbf{a}) + \nabla^2(\nabla^2\mathbf{a})\end{aligned}$$

而

$$\text{div}(\nabla^2\mathbf{a}) = -\text{div rot}(\text{rot}\mathbf{a}) = 0$$

所以

$$\text{rot rot rot rot}\mathbf{a} = \nabla^2(\nabla^2\mathbf{a})$$

例 8 证明

$$\nabla^2 AB = A\nabla^2 B + 2\text{grad}A \cdot \text{grad}B + B\nabla^2 A$$

证：

$$\begin{aligned}\nabla^2 AB &= \nabla^2 AB \\ &= (\nabla \cdot \nabla)AB \\ &= (\nabla \cdot \nabla AB) \\ &= \nabla \cdot (\nabla A_c B + \nabla A B_c) \\ &= \nabla \cdot (A_c \nabla B + B_c \nabla A) \\ &= \nabla \cdot (A\text{grad}B + B\text{grad}A) \\ &= \nabla \cdot A_c \text{grad}B + \nabla \cdot A(\text{grad}B)_c \\ &\quad + \nabla \cdot B_c \text{grad}A + \nabla \cdot B(\text{grad}A)_c \\ &= A_c \nabla \cdot \text{grad}B + \nabla A \cdot (\text{grad}B)_c\end{aligned}$$

$$+ B_c\nabla \cdot \mathrm{grad}A + \nabla B \cdot (\mathrm{grad}A)_c$$

$$= A_c\nabla \cdot \nabla B + \mathrm{grad}A \cdot \mathrm{grad}B$$

$$+ B_c\nabla \cdot \nabla A + \mathrm{grad}B \cdot \mathrm{grad}A$$

$$= A\nabla^2 B + 2\mathrm{grad}A \cdot \mathrm{grad}B + B\nabla^2 A$$

例 9 证明

$$\nabla^2(A\mathbf{a}) = A\nabla^2\mathbf{a} + \mathbf{a}\nabla^2 A + 2(\mathrm{grad}A \cdot \nabla)\mathbf{a}$$

证:

$$\nabla^2(A\mathbf{a}) = (\nabla \cdot \nabla)A\mathbf{a}$$

$$= \mathbf{i}(\nabla \cdot \nabla)Aa_x + \mathbf{j}(\nabla \cdot \nabla)Aa_y + \mathbf{k}(\nabla \cdot \nabla)Aa_z$$

$$= \mathbf{i}(A\nabla^2 a_x + 2\mathrm{grad}A \cdot \mathrm{grad}a_x + a_x\nabla^2 A)$$

$$+ \mathbf{j}(A\nabla^2 a_y + 2\mathrm{grad}A \cdot \mathrm{grad}a_y + a_y\nabla^2 A)$$

$$+ \mathbf{k}(A\nabla^2 a_z + 2\mathrm{grad}A \cdot \mathrm{grad}a_z + a_z\nabla^2 A)$$

$$= A\nabla^2(\mathbf{i}a_x + \mathbf{j}a_y + \mathbf{k}a_z)$$

$$+ 2[(\mathrm{grad}A)_c \cdot \nabla](\mathbf{i}a_x + \mathbf{j}a_y + \mathbf{k}a_z)$$

$$+ (\mathbf{i}a_x + \mathbf{j}a_y + \mathbf{k}a_z)\nabla^2 A$$

$$= A\nabla^2\mathbf{a} + \mathbf{a}\nabla^2 A + 2(\mathrm{grad}A \cdot \nabla)\mathbf{a}$$

变换过程中应用了例 8 的结果。

例 10 证明

$$\mathrm{grad}\ \mathrm{div}(A\mathbf{a}) = (\mathrm{grad}A)\mathrm{div}A + A\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\mathbf{a} + \mathrm{grad}A \times \mathrm{rot}\mathbf{a} + (\mathbf{a} \cdot \nabla)\mathrm{grad}A + (\mathrm{grad}A \cdot \nabla)\mathbf{a}$$

证:

$$\mathrm{grad}\ \mathrm{div}(A\mathbf{a}) = \mathrm{grad}\ (\nabla \cdot A\mathbf{a})$$

$$= \mathrm{grad}(\nabla \cdot A_c\mathbf{a} + \nabla \cdot A\mathbf{a}_c)$$

$$= \mathrm{grad}(A\mathrm{div}\mathbf{a} + \mathbf{a} \cdot \mathrm{grad}A)$$

$$= \nabla(A\mathrm{div}\mathbf{a}) + \nabla(\mathbf{a} \cdot \mathrm{grad}A)$$

$$= \nabla(A_c\mathrm{div}\mathbf{a}) + (\nabla A)(\mathrm{div}\mathbf{a})_c$$

$$+ \nabla(\mathbf{a}_c \cdot \mathrm{grad}A) + \nabla[\mathbf{a} \cdot (\mathrm{grad}A)_c]$$

$$= A\nabla\mathrm{div}\mathbf{a} + (\mathrm{grad}A)\mathrm{div}A$$

$$+ \mathbf{a}_c \times (\nabla \times \mathrm{grad}A) + (\mathbf{a}_c \cdot \nabla)\mathrm{grad}A$$

$$+ (\mathrm{grad}A)_c \times (\nabla \times A) + [(\mathrm{grad}A)_c \cdot \nabla]\mathbf{a}$$

$$= A\text{grad div}\mathbf{a} + (\text{grad}A)\text{div}A + \text{grad}A \times \text{rot}A + (\mathbf{a}\cdot\nabla)\text{grad}A + (\text{grad}A\cdot\nabla)\mathbf{a}$$

$(\nabla \times \text{grad}A = \text{rot grad}A = 0)$

例 11 证明

$$\text{rot rot}(A\mathbf{a}) = \text{grad}A \times \text{rot}\mathbf{a} - \mathbf{a}\nabla^2 A + (\mathbf{a}\cdot\nabla)\text{grad}A + A\text{rot rot}\mathbf{a} + (\text{grad}A)\text{div}\mathbf{a} - (\text{grad}A\cdot\nabla)\mathbf{a}$$

证：

$$\begin{aligned}
\text{rot rot}(A\mathbf{a}) &= \text{rot}(\nabla \times A\mathbf{a}) \\
&= \text{rot}(\nabla \times A_c\mathbf{a} + \nabla \times A\mathbf{a}_c) \\
&= \text{rot}(A\text{rot}\mathbf{a} + \text{grad}A \times \mathbf{a}) \\
&= \nabla \times (A\text{rot}\mathbf{a}) + \nabla \times (\text{grad}A \times \mathbf{a}) \\
&= \nabla \times (A_c\text{rot}\mathbf{a}) + \nabla A \times (\text{rot}\mathbf{a})_c \\
&\quad + \nabla \times [(\text{grad}A)_c \times \mathbf{a}] + \nabla \times [\text{grad}A \times \mathbf{a}_c] \\
&= A_c\nabla \times [\nabla \times \mathbf{a}] + \text{grad}A \times \text{rot}\mathbf{a} \\
&\quad + (\text{grad}A)_c(\nabla\cdot\mathbf{a}) - [(\text{grad}A)_c\cdot\nabla]\mathbf{a} \\
&\quad + (\mathbf{a}_c\cdot\nabla)\text{grad}A - \mathbf{a}_c(\nabla\cdot\text{grad}A) \\
&= A\text{rot rot}\mathbf{a} + \text{grad}A \times \text{rot}\mathbf{a} \\
&\quad + (\text{grad}A)(\text{div}\mathbf{a}) - (\text{grad}A\cdot\nabla)\mathbf{a} \\
&\quad + (\mathbf{a}\cdot\nabla)\text{grad}A - \mathbf{a}\nabla^2 A
\end{aligned}$$

例 12 证明 $\nabla^2\mathbf{r} = 0$。

证：由例 2 得，

$$\nabla^2\mathbf{r} = \mathbf{i}\nabla^2 x + \mathbf{j}\nabla^2 y + \mathbf{k}\nabla^2 z = 0$$

例 13 证明 $\nabla^2 r = \dfrac{2}{r}$.

证：

$$\begin{aligned}
\nabla^2 r &= \text{div grad}r = \text{div}\left(\frac{\mathbf{r}}{r}\right) \\
&= \nabla\cdot\left(\frac{\mathbf{r}}{r}\right) \\
&= \frac{1}{r}\nabla\cdot\mathbf{r} + \mathbf{r}\cdot\nabla\frac{1}{r}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{3}{r} + \mathbf{r} \cdot \frac{-\mathbf{r}}{r^2 r} \\
&= \frac{3}{r} - \frac{1}{r} \\
&= \frac{2}{r}
\end{aligned}
$$

例 14 证明 $\nabla^2 r^n = n(n+1)r^{n-2}$。

证：因为

$$\nabla r^n = n r^{n-2}\mathbf{r}$$

所以

$$
\begin{aligned}
\nabla^2 r^n &= (\nabla \cdot \nabla) r^n \\
&= \nabla \cdot \nabla r^n \\
&= \nabla \cdot n r^{n-2}\mathbf{r} \\
&= \mathbf{r} \cdot \nabla n r^{n-2} + n r^{n-2} \nabla \cdot \mathbf{r} \\
&= n\mathbf{r} \cdot (n-2) r^{n-3} \frac{\mathbf{r}}{r} + 3n r^{n-2} \\
&= n r^{n-2}(n-2+3) \\
&= n(n+1) r^{n-2}
\end{aligned}
$$

例 15 设 $u = f(r)$，求 $\nabla^2 u$。

解：

$$
\begin{aligned}
\nabla^2 u &= \nabla^2 u = (\nabla \cdot \nabla) u \\
&= (\nabla \cdot \nabla u) \\
&= \left(\nabla \cdot f'(r) \frac{\mathbf{r}}{r}\right) \\
&= \nabla \cdot u' \frac{\mathbf{r}}{r} \\
&= \left(\frac{u'}{r}\right)_c \nabla \cdot \mathbf{r} + \nabla \frac{u'}{r} \cdot \mathbf{r}_c \\
&= \frac{u'}{r} 3 + \frac{(r u'' - u')\mathbf{r}}{r^2 r} \cdot \mathbf{r} \\
&= u'' - \frac{u'}{r} + \frac{3u'}{r}
\end{aligned}
$$

$$= u'' + \frac{2u'}{r}$$

$$= u'' + 2u'r^{-1}$$

例 16: 证明 $\nabla^2\frac{(\mathbf{a}\cdot\mathbf{r})}{r^3}=0$，式中 $\mathbf{a}$ 为常矢量。

证:

$$\nabla^2\left(\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{r}}{r^3}\right)=\text{div grad}\,\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{r}}{r^3}$$

但

$$\text{grad}\,\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{r}}{r^3}=\frac{\mathbf{a}}{r^3}-\frac{3(\mathbf{a}\cdot\mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5}\quad（用辅助公式 4,8）$$

$$\text{div}\frac{\mathbf{a}}{r^3}=\nabla\cdot\frac{\mathbf{a}}{r^3}=\mathbf{a}\cdot\nabla\frac{1}{r^3}=-\frac{3(\mathbf{a}\cdot\mathbf{r})}{r^5}$$

$$-3\text{div}\frac{(\mathbf{a}\cdot\mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5}=-3\frac{(\mathbf{a}\cdot\mathbf{r})}{r^5}\text{div}\mathbf{r}$$

$$-3\mathbf{r}\text{grad}\frac{(\mathbf{a}\cdot\mathbf{r})}{r^5}$$

$$=-9\frac{(\mathbf{a}\cdot\mathbf{r})}{r^5}-3\mathbf{r}\cdot\left[\frac{\mathbf{a}}{r^5}+(\mathbf{a}\cdot\mathbf{r})\cdot\frac{-5\mathbf{r}}{r^7}\right]$$

$$=-\frac{9(\mathbf{a}\cdot\mathbf{r})}{r^5}-\frac{3(\mathbf{a}\cdot\mathbf{r})}{r^5}+\frac{15(\mathbf{a}\cdot\mathbf{r})}{r^5}$$

$$=3\frac{(\mathbf{a}\cdot\mathbf{r})}{r^5}$$

故

$$\nabla^2\frac{(\mathbf{a}\cdot\mathbf{r})}{r^3}=\frac{-3(\mathbf{a}\cdot\mathbf{r})}{r^5}+3\frac{(\mathbf{a}\cdot\mathbf{r})}{r^3}$$

$$=0$$

例 17 设 $\mathbf{a},\mathbf{b}$ 为常矢量,证明

$$\mathbf{a}\cdot\text{grad}(\mathbf{b}\cdot\text{grad}\phi)=\mathbf{b}\cdot\text{grad}(\mathbf{a}\cdot\text{grad}\phi)$$

证:

$$\mathbf{a}\cdot\text{grad}(\mathbf{b}\cdot\text{grad}\phi)=\mathbf{a}\cdot\nabla(\mathbf{b}\cdot\nabla\phi)$$

$$=(\mathbf{b}\cdot\nabla)(\mathbf{a}\cdot\nabla\phi)$$

$$=\mathbf{b}\cdot\nabla(\mathbf{a}\cdot\nabla\phi)$$

$$=\mathbf{b}\cdot\text{grad}(\mathbf{a}\cdot\text{grad}\phi)$$

4-27　格林积分定理

利用公式

$$\int_V T(\nabla)dV = \int_S T(\mathbf{n})dS \qquad (4-67)$$

取不同的 $T(\nabla)$，还可以推导出一系列所谓格林积分定理，例如：

格林积分定理 1

$$\int_V [A\nabla^2 B + (\mathrm{grad}A \cdot \mathrm{grad}B)]dV = \int_S A\frac{\partial B}{\partial n}dS \qquad (4-68)$$

式中 $\frac{\partial B}{\partial n}$ 为法线方向上的导数.

证：取 $T(\nabla) = \nabla \cdot (A\mathrm{grad}B)$，则

$$\begin{aligned} T(\nabla) &= \nabla \cdot (A\mathrm{grad}B) \\ &= \nabla \cdot (A_c\mathrm{grad}B) + \nabla A \cdot (\mathrm{grad}B)_c \\ &= A_c\nabla \cdot \mathrm{grad}B + (\mathrm{grad}B)_c \cdot \nabla A \\ &= A\mathrm{div}\ \mathrm{grad}B + \mathrm{grad}B \cdot \mathrm{grad}A \\ &= A\nabla^2 B + \mathrm{grad}\mathbf{A} \cdot \mathrm{grad}B \end{aligned}$$

$$T(\mathbf{n}) = \mathbf{n} \cdot A\mathrm{grad}B = A\mathrm{grad}_n B = A\frac{\partial B}{\partial n}$$

代入式(4-67)即得所需结果。公式(4-68)通常称为第一标量格林定理。

格林积分定理 2

$$\int_V (A\nabla^2 B - B\nabla^2 A)dV = \int_S \left(A\frac{\partial B}{\partial n} - B\frac{\partial A}{\partial n}\right)dS \qquad (4-69)$$

证：将公式(4-68)中之 A 换成 B 和将 B 换成 A 得

$$\int_V [B\nabla^2 A + (\mathrm{grad}B \cdot \mathrm{grad}A)]dV = \int_S B\frac{\partial A}{\partial n}dS \qquad (4-70)$$

式(4-68)减式(4-70)即得所需结果。公式(4-69)通常称为第二标

量格林定理。

格林积分定理 3

$$\int_V (\text{rot}\mathbf{a}\cdot\text{rot}\mathbf{b}-\mathbf{a}\cdot\text{rot rot}\mathbf{b})dV=\int_S(\mathbf{a}\times\text{rot}\mathbf{b})\cdot\mathbf{n}dS \quad (4\text{-}71)$$

证：取 $T(\nabla)=\nabla\cdot[\mathbf{a}\times\text{rot}\mathbf{b}]$，则

$$\begin{aligned}T(\nabla)&=\nabla\cdot[\mathbf{a}\times\text{rot}\mathbf{b}]\\&=[\nabla\times\mathbf{a}]\cdot\text{rot}\mathbf{b}\\&=[\nabla\times\mathbf{a}_c]\cdot\text{rot}\mathbf{b}+[\nabla\times\mathbf{a}]\cdot(\text{rot}\mathbf{b})_c\\&=\text{rot}\mathbf{a}\cdot\text{rot}\mathbf{b}-\mathbf{a}_c\cdot[\nabla\times\text{rot}\mathbf{b}]\\&=\text{rot}\mathbf{a}\cdot\text{rot}\mathbf{b}-\mathbf{a}\cdot\text{rot rot}\mathbf{b}\end{aligned}$$

$$T(\mathbf{n})=\mathbf{n}\cdot[\mathbf{a}\times\text{rot}\mathbf{b}]$$

代入公式(4-67)即得所需结果．这一公式通常称为第一矢量格林定理。

格林积分定理 4

$$\int_V(\mathbf{b}\cdot\text{rot rot}\mathbf{a}-\mathbf{a}\cdot\text{rot rot}\mathbf{b})dV$$
$$=\int_S[(\mathbf{n}\times\mathbf{a})\cdot\text{rot}\mathbf{b}-(\mathbf{n}\times\mathbf{b})\cdot\text{rot}\mathbf{a}]dS \quad (4\text{-}72)$$

证：交换公式(4-71)中的 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$，将所得结果与式(4-71)相减即得所需结果．这一公式通常称为第二矢量格林定理。

格林积分定理 5

$$\int_V(\text{div}\mathbf{a}\,\text{div}\mathbf{b}+\mathbf{b}\cdot\text{grad div}\mathbf{a})dV$$
$$=\int_S(\text{div}\mathbf{a})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{n})dS \quad (4\text{-}73)$$

证：取 $T(\nabla)=\nabla\cdot(\mathbf{b}\text{div}\mathbf{a})$，则

$$\begin{aligned}T(\nabla)&=\nabla\cdot(\mathbf{b}\text{div}\mathbf{a})\\&=\nabla\cdot[\mathbf{b}(\text{div}\mathbf{a})_c]+\nabla\cdot(\mathbf{b}_c\text{div}\mathbf{a})\\&=(\text{div}\mathbf{a})_c\nabla\cdot\mathbf{b}+\mathbf{b}_c\cdot\nabla\text{div}\mathbf{a}\\&=\text{div}\mathbf{a}\,\text{div}\mathbf{b}+\mathbf{b}\cdot\text{grad div}\mathbf{a}\end{aligned}$$

$$T(\mathbf{n})=\mathbf{n}\cdot(\mathbf{b}\text{div}\mathbf{a})=(\text{div}\mathbf{a})(\mathbf{n}\cdot\mathbf{b})$$

代入公式(4-67)即得所需结果。

格林积分定理 6

$$\int_V \mathbf{a} \cdot \text{grad div}\mathbf{b} - \mathbf{b} \cdot \text{grad div}\mathbf{a})dV$$

$$= \int_S [(\mathbf{a} \cdot \mathbf{n})\text{div}\mathbf{b} - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{n})\text{div}\mathbf{a}]dS \qquad (4\text{-}74)$$

证：交换公式(4-73)中的 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$，将所得结果与式(4-73)相减即得所需结果。

格林积分定理 7

$$\int_V [\mathbf{a} \cdot \nabla^2\mathbf{b} + \text{rot}\mathbf{a} \cdot \text{rot}\mathbf{b} + \text{div}\mathbf{a}\text{div}\mathbf{b}]dV$$

$$= \int_S [(\mathbf{n} \times \mathbf{a}) \cdot \text{rot}\mathbf{b} + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{a})\text{div}\mathbf{b}]dS \qquad (4\text{-}75)$$

证：取 $T(\nabla) = (\nabla \times \mathbf{a}) \cdot \text{rot}\mathbf{b} + (\nabla \cdot \mathbf{a})\text{div}\mathbf{b}$，则

$$\begin{aligned}
T(\nabla) &= (\nabla \times \mathbf{a}) \cdot \text{rot}\mathbf{b} + (\nabla \cdot \mathbf{a})\text{div}\mathbf{b} \\
&= (\nabla \times \mathbf{a}) \cdot (\text{rot}\mathbf{b})_c + (\nabla \times \mathbf{a}_c) \cdot \text{rot}\mathbf{b} \\
&\quad + (\nabla \cdot \mathbf{a})(\text{div}\mathbf{b})_c + (\nabla \cdot \mathbf{a}_c)\text{div}\mathbf{b} \\
&= \text{rot}\mathbf{a} \cdot \text{rot}\mathbf{b} - (\nabla \times \text{rot}\mathbf{b}) \cdot \mathbf{a}_c \\
&\quad + \text{div}\mathbf{a}\text{div}\mathbf{b} + (\mathbf{a}_c \cdot \nabla)\text{div}\mathbf{b} \\
&= \text{rot}\mathbf{a} \cdot \text{rot}\mathbf{b} + \text{div}\mathbf{a}\text{div}\mathbf{b} \\
&\quad - (\text{graddiv}\mathbf{b} - \nabla^2\mathbf{b}) \cdot \mathbf{a}_c + (\mathbf{a}_c \cdot \nabla)\text{div}\mathbf{b}
\end{aligned}$$

但

$$\begin{aligned}
\text{graddiv}\mathbf{b} \cdot \mathbf{a} &= \nabla(\nabla \cdot \mathbf{b}) \cdot \mathbf{a}_c \\
&= (\mathbf{a}_c \cdot \nabla)(\nabla \cdot \mathbf{b}) = (\mathbf{a}_c \cdot \nabla)\text{div}\mathbf{b}
\end{aligned}$$

故

$$T(\nabla) = \text{rot}\mathbf{a} \cdot \text{rot}\mathbf{b} + \text{div}\mathbf{a}\text{div}\mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \nabla^2\mathbf{b}$$

$$T(\mathbf{n}) = [\mathbf{n} \times \mathbf{a}] \cdot \text{rot}\mathbf{b} + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{a})\text{div}\mathbf{b}$$

代入公式(4-67)即得所需结果.

格林积分定理 8

$$\int_V (\mathbf{a} \cdot \nabla^2\mathbf{b} - \mathbf{b} \cdot \nabla^2\mathbf{a})dV$$

$$= \int_S [(\mathbf{n} \cdot \mathbf{a})\text{div}\mathbf{b} - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{b})\text{div}\mathbf{a}$$

$$+(\mathbf{n}\times\mathbf{a})\cdot\mathrm{rot}\mathbf{b}-(\mathbf{n}\times\mathbf{b})\cdot\mathrm{rot}\mathbf{a}]dS \quad (4\text{-}76)$$

证: 交换公式(4-75)中的 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$，将所得结果与式(4-75)相减即得所需结果。

格林积分定理 9

$$\int_V[\mathbf{a}\mathrm{div}\mathbf{b}+\mathbf{b}\mathrm{div}\mathbf{a}-\mathbf{a}\times\mathrm{rot}\mathbf{b}-\mathbf{b}\times\mathrm{rot}\mathbf{a}]dV$$

$$=\int_S[\mathbf{a}(\mathbf{n}\cdot\mathbf{b})+\mathbf{b}(\mathbf{n}\cdot\mathbf{a})-\mathbf{n}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})]dS \quad (4\text{-}77)$$

证：取 $T(\nabla)=(\nabla\cdot\mathbf{b})\mathbf{a}+(\nabla\cdot\mathbf{a})\mathbf{b}-\nabla(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})$，则

$$T(\nabla)=(\nabla\cdot\mathbf{b})\mathbf{a}_c+(\nabla\cdot\mathbf{b}_c)\mathbf{a}+(\nabla\cdot\mathbf{a}_c)\mathbf{b}+(\nabla\cdot\mathbf{a})\mathbf{b}_c$$
$$-\nabla(\mathbf{a}_c\cdot\mathbf{b})-\nabla(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}_c)$$
$$=\mathbf{a}\mathrm{div}\mathbf{b}+\mathbf{b}\mathrm{div}\mathbf{a}+(\mathbf{b}_c\cdot\nabla)\mathbf{a}+(\mathbf{a}_c\cdot\nabla)\mathbf{b}$$
$$-\mathbf{a}_c\times(\nabla\times\mathbf{b})-(\mathbf{a}_c\cdot\nabla)\mathbf{b}$$
$$-\mathbf{b}_c\times(\nabla\times\mathbf{a})-(\mathbf{b}_c\cdot\nabla)\mathbf{a}$$
$$=\mathbf{a}\mathrm{div}\mathbf{b}+\mathbf{b}\mathrm{div}\mathbf{a}-\mathbf{a}\times\mathrm{rot}\mathbf{b}-\mathbf{b}\times\mathrm{rot}\mathbf{a}$$
$$T(\mathbf{n})=(\mathbf{n}\cdot\mathbf{b})\mathbf{a}+(\mathbf{n}\cdot\mathbf{a})\mathbf{b}-\mathbf{n}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})$$

代入公式(4-67)即得所需结果。

格林积分定理 10

$$\int_V[\mathbf{b}\mathrm{div}\mathbf{a}+(\mathbf{a}\cdot\nabla)\mathbf{b}]dV=\int_S(\mathbf{n}\cdot\mathbf{a})\mathbf{b}dS \quad (4\text{-}78)$$

证：取 $T(\nabla)=(\nabla\cdot\mathbf{a})\mathbf{b}$，则

$$T(\nabla)=(\nabla\cdot\mathbf{a}_c)\mathbf{b}+(\nabla\cdot\mathbf{a})\mathbf{b}_c$$
$$=\mathbf{b}\mathrm{div}\mathbf{a}+(\mathbf{a}\cdot\nabla)\mathbf{b}$$
$$T(\mathbf{n})=(\mathbf{n}\cdot\mathbf{a})\mathbf{b}$$

代入公式(4-67)即得所需结果。

格林积分定理 11

$$\int_V\mathrm{grad}A\cdot\mathrm{rot}\mathbf{v}dV=\int_S\mathbf{n}\cdot A\mathrm{rot}\mathbf{v}dS$$

$$=\int_S\mathbf{n}\cdot(\mathbf{v}\times\mathrm{grad}A)dS$$

证：取 $T(\nabla)=\nabla\cdot(\mathbf{v}\times\mathrm{grad}A)$，则

$$T(\nabla) = \nabla \cdot (\mathbf{v}_c \times \mathrm{grad}A) + \nabla \cdot [\mathbf{v} \times (\mathrm{grad}A)_c]$$
$$= (\mathrm{grad}A_c) \cdot (\nabla \times \mathbf{v}) - \mathbf{v}_c \cdot (\nabla \times \mathrm{grad}A)$$
$$= \mathrm{grad}A \cdot \mathrm{rot}\mathbf{v} \quad (\nabla \times \mathrm{grad}A = 0)$$

另一方面，

$$\nabla \cdot A\mathrm{rot}\mathbf{v} = \nabla \cdot A_c\mathrm{rot}\mathbf{v} + \nabla A \cdot (\mathrm{rot}\mathbf{v})_c$$
$$= A\mathrm{div}\,\mathrm{rot}\mathbf{v} + \mathrm{grad}A \cdot \mathrm{rot}\mathbf{v}$$
$$= \mathrm{grad}A \cdot \mathrm{rot}\mathbf{v}(\mathrm{div}\,\mathrm{rot}\mathbf{v} = 0)$$
$$= T(\nabla)$$

故

$$T(\mathbf{n}) = \mathbf{n} \cdot (\mathbf{v} \times \mathrm{grad}A) = \mathbf{n} \cdot A\mathrm{rot}\mathbf{v}$$

代入公式(4-67)即得所需结果。

格林积分定理 12

$$\int_V [A\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\mathbf{v} + \mathbf{v}\nabla^2 A + (\mathrm{div}\mathbf{v})\mathrm{grad}A]dV$$
$$= \int_S [A\mathbf{n} \times \mathrm{rot}\mathbf{v} + (\mathbf{n} \times \mathbf{v}) \times \mathrm{grad}A + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{v})\mathrm{grad}A]dS$$

证：取 $T(\nabla) = \nabla A \times \mathrm{rot}\mathbf{v} + (\nabla \times \mathbf{v}) \times \mathrm{grad}A + (\nabla \cdot \mathbf{v})\mathrm{grad}A$，则

$$T(\nabla) = \nabla A_c \times \mathrm{rot}\mathbf{v} + \nabla A \times (\mathrm{rot}\mathbf{v})_c + (\nabla \times \mathbf{v}_c) \times \mathrm{grad}A + (\nabla \times \mathbf{v}) \times (\mathrm{grad}A)_c + (\nabla \cdot \mathbf{v}_c)\mathrm{grad}A + (\nabla \cdot \mathbf{v})(\mathrm{grad}A)_c$$
$$= A\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\mathbf{v} + \mathrm{grad}A \times \mathrm{rot}\mathbf{v} - \mathrm{grad}A \times \mathrm{rot}\mathbf{v} + \mathbf{v}_c(\nabla \cdot \mathrm{grad}A) - (\nabla\mathbf{v}_c \cdot \mathrm{grad}A) + (\mathbf{v}_c \cdot \nabla)\mathrm{grad}A + (\mathrm{grad}A)_c(\nabla \cdot \mathbf{v})$$
$$= A\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\mathbf{v} + \mathbf{v}\nabla^2 A + (\mathrm{div}\mathbf{v})\mathrm{grad}A - \mathbf{v}_c \times (\nabla \times \mathrm{grad}A) - (\mathbf{v}_c \cdot \nabla)\mathrm{grad}A + (\mathbf{v}_c \cdot \nabla)\mathrm{grad}A$$
$$= A\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\mathbf{v} + \mathbf{v}\nabla^2 A + (\mathrm{div}\mathbf{v})\mathrm{grad}A \quad (\nabla \times \mathrm{grad}A = 0)$$

故

$$T(\mathbf{n}) = A\mathbf{n} \times \text{rot}\mathbf{v} + (\mathbf{n} \times \mathbf{v}) \times \text{grad}A + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{v})\text{grad}A$$

代入公式(4-67)即得所需结果。

格林积分定理 13

$$\int_V [A\text{rot rot}\mathbf{a} + \mathbf{a}\nabla^2 A - (\mathbf{a} \cdot \nabla)\text{grad}A]dV$$

$$= \int_S [A\mathbf{n} \times \text{rot}\mathbf{a} + (\mathbf{n} \times \mathbf{a}) \times \text{grad}A]dS$$

证：取 $T(\nabla) = \nabla(A \times \text{rot}\mathbf{a}) + (\nabla \times \mathbf{a}) \times \text{grad}A$，则

$$\begin{aligned} T(\nabla) &= \nabla(A_c \times \text{rot}\mathbf{a}) + \nabla[A \times (\text{rot}\mathbf{a})_c] + (\nabla \times \mathbf{a}_c) \\ &\quad \times \text{grad}A + (\nabla \times \mathbf{a}) \times (\text{grad}A)_c \\ &= A\text{rot rot}\mathbf{a} + \text{grad}A \times \text{rot}\mathbf{a} + \mathbf{a}_c(\nabla \cdot \text{grad}A) \\ &\quad - \nabla(\mathbf{a}_c \cdot \text{grad}A) + \text{rot}\mathbf{a} \times \text{grad}A \\ &= A\text{rot rot}\mathbf{a} + \mathbf{a}\nabla^2 A - \mathbf{a}_c \times (\nabla \times \text{grad}A) \\ &\quad - (\mathbf{a}_c \cdot \nabla)\text{grad}A \\ &= A\text{rot rot}\mathbf{a} + \mathbf{a}\nabla^2 A - (\mathbf{a} \cdot \nabla)\text{grad}A \end{aligned}$$

$$(\mathbf{a}_c \times (\nabla \times \text{grad}A) = \mathbf{a}_c \times \text{rotgrad}A = 0)$$

故

$$\begin{aligned} T(\mathbf{n}) &= \mathbf{n}(A \times \text{rot}\mathbf{a}) + (\mathbf{n} \times \mathbf{a}) \times \text{grad}A \\ &= A\mathbf{n} \times \text{rot}\mathbf{a} + (\mathbf{n} \times \mathbf{a}) \times \text{grad}A \end{aligned}$$

代入公式(4-67)即得所需结果。这一公式通常称为矢量一标量格林定理。

通过选择其他的 $T(\nabla)$ 还可以推导出许多公式，以上仅仅是一些常用的情况。格林定理在电磁场理论中有重要的应用[6]。

4-28 复矢量的微积分

4-28-1 复矢量函数的梯度、散度和旋度的定义

若 $\varphi(x,y,z)$ 为复函数 $\mathbf{R}(x,y,z)$ 和 $\mathbf{a}(x, y, z)$ 为复矢量函数(即各分量均为复函数)，则定义

$$\text{grad}\varphi = \mathbf{i}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial\varphi}{\partial z}$$

$$\mathrm{div}\mathbf{R} = \frac{\partial R_x}{\partial x} + \frac{\partial R_y}{\partial y} + \frac{\partial R_z}{\partial z}$$

$$(\mathbf{R} = \mathbf{i}R_x + \mathbf{j}R_y + \mathbf{k}R_z)$$

$$\mathrm{rot}\mathbf{R} = \left(\frac{\partial R_z}{\partial y} - \frac{\partial R_y}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial R_x}{\partial z} - \frac{\partial R_z}{\partial x}\right)\mathbf{j}$$

$$+ \left(\frac{\partial R_y}{\partial x} - \frac{\partial R_x}{\partial y}\right)\mathbf{k}$$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ R_x & R_y & R_z \end{vmatrix}$$

R 在 **a**“方向”上的导数乘以 **a** 的“幅值”定义为

$$a_x \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{R} + a_y \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{R} + a_z \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{R}$$

$$(\mathbf{a} = \mathbf{i}a_x + \mathbf{j}a_y + \mathbf{k}a_z)$$

从形式上看，复函数与实函数的情况完全相同，区别仅在于失去了几何意义．如果引入符号矢量

$$\nabla = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

并对含有∇和复函数的、对∇为线性的表达式按第一或第二定义方式加以定义，则可看出，结果在形式上和实函数的情况完全一样，即 4-2 节中的表 1 完全不变．这里不再重复，我们只写出几个最主要的定义结果：

$$\nabla\varphi = \mathrm{grad}\varphi$$

$$\nabla \cdot \mathbf{R} = \mathrm{div}\mathbf{R}$$

$$\nabla \times \mathbf{R} = \mathrm{rot}\mathbf{R}$$

$$(\mathbf{a} \cdot \nabla)\mathbf{R} = a_x \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{R} + a_y \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{R} + a_z \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{R}$$

4-28-2 复矢量的 $T(\nabla)$ 的定义

和实矢量的情况完全相同，我们对含有复函数的、对∇为线性的表达式$T(\nabla)$作如下定义(第二定义)：

$$T(\nabla)=\frac{\partial}{\partial x}T(\mathbf{i})+\frac{\partial}{\partial y}T(\mathbf{j})+\frac{\partial}{\partial z}T(\mathbf{k})$$

式中$T(\mathbf{i}),T(\mathbf{j}),T(\mathbf{k})$为在含有$\nabla$的式子中将$\nabla$换成$\mathbf{i},\mathbf{j}$和$\mathbf{k}$的结果.

由此定义可得：

(1) $$\nabla\varphi=\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i}\varphi+\frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j}\varphi+\frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}\varphi$$
$$=\mathbf{i}\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\mathbf{j}\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\mathbf{k}\frac{\partial\varphi}{\partial z}$$
$$=\mathrm{grad}\varphi=\nabla\varphi$$

式中φ为复函数。因 $\varphi=\mathrm{Re}\varphi+\mathrm{Im}\varphi$，故

$$\nabla\varphi=\nabla\mathrm{Re}\varphi+i\nabla\mathrm{Im}\varphi=\mathrm{gradRe}\varphi+i\,\mathrm{gradIm}\varphi$$
$$=\nabla\mathrm{Re}\varphi+i\nabla\mathrm{Im}\varphi$$

(2) $$\nabla\cdot\mathbf{R}=\frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{i}\cdot\mathbf{R})+\frac{\partial}{\partial y}(\mathbf{j}\cdot\mathbf{R})+\frac{\partial}{\partial z}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{R})$$
$$=\frac{\partial R_x}{\partial x}+\frac{\partial R_y}{\partial y}+\frac{\partial R_z}{\partial z}$$
$$=\mathrm{div}\mathbf{R}=\nabla\cdot\mathbf{R}$$
$$=\mathrm{divRe}\mathbf{R}+i\,\mathrm{divIm}\mathbf{R}$$
$$=\nabla\cdot\mathrm{Re}\mathbf{R}+i\nabla\cdot\mathrm{Im}\mathbf{R}$$

(3) $$\nabla\times\mathbf{R}=\frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{i}\times\mathbf{R})+\frac{\partial}{\partial y}(\mathbf{j}\times\mathbf{R})+\frac{\partial}{\partial z}(\mathbf{k}\times\mathbf{R})$$
$$=\mathrm{rot}\mathbf{R}=\nabla\times\mathbf{R}=\mathrm{rotRe}\mathbf{R}+i\,\mathrm{rotIm}\mathbf{R}$$
$$=\nabla\times\mathrm{Re}\mathbf{R}+i\nabla\times\mathrm{Im}\mathbf{R}$$

(4) $$(\mathbf{a}_c\cdot\nabla)\mathbf{R}=\frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{a}_c\cdot\mathbf{i})\mathbf{R}+\frac{\partial}{\partial y}(\mathbf{a}_c\cdot\mathbf{j})\mathbf{R}$$
$$+\frac{\partial}{\partial z}(\mathbf{a}_c\cdot\mathbf{k})\mathbf{R}$$

$$= a_x \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x} + a_y \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial y} + a_z \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial z}$$

$$= (\mathbf{a} \cdot \nabla)\mathbf{R}$$

式中 $\mathbf{a}$ 为复矢量函数。

4-28-3 $T(\nabla)$ 的性质

运用与实函数情况相同的方法，可以证明（证明过程同前）$T(\nabla)$ 具有下列性质：

(1) 对任何 $T(\nabla)$ 都可将 ∇ 看作矢量进行恒等变换，所得结果不变。

(2) 如果在式子 $T(\nabla)$ 中 ∇ 后边有两个函数的乘积（数积、标量积或矢量积），那么 $T(\nabla)$ 可表示成两项之和。在一项中，一个函数视为常数，不受微分影响；而在另一项中，另一函数视为常数，也不受微分影响。

(3) 如果某一 $T(\nabla)$ 可表述为另一个 $T_1(\nabla)$ 与一个以乘积号（数乘、点乘或叉乘）连接的微分（积分）情况下被视为常数的函数之乘积，则 $T(\nabla)$ 就等于这个视为常数的函数与由 $T_1(\nabla)$ 所决定的函数之乘积。

(4) 对 $T(\nabla)$ 有下列积分公式：

$$\int_V T(\nabla) dV = \int_S T(\mathbf{n}) dS$$

式中，S 为包含 V 之封闭曲面；$\mathbf{n}$ 为朝向 V 外部的单位法矢量。

(5) $T(\nabla)$ 在某固定点 P 上之值与坐标系的选择无关（由第一定义的表达式可立即看出这一点）。

(6) 另外，还有

$$\operatorname{grad} \varphi f(\mathbf{r}) = \frac{\partial \varphi}{\partial f} \operatorname{grad} f(\mathbf{r}),$$

$$\operatorname{grad}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}) = \mathbf{a}$$

式中，$\mathbf{a}$ 为常矢量等辅助公式。

例 1 如 $\mathbf{b}$ 为常矢量，证明 $\operatorname{grad} e^{\mathbf{b}\cdot\mathbf{r}} = e^{\mathbf{b}\cdot\mathbf{r}}\mathbf{b}$

证

$$
\begin{aligned}
\mathrm{grad}e^{\mathbf{b}\cdot\mathbf{r}} &= \nabla e^{\mathbf{b}\cdot\mathbf{r}} \\
&= \bigtriangledown e^{\mathbf{b}\cdot\mathbf{r}} \\
&= \frac{\partial e^{\mathbf{b}\cdot\mathbf{r}}}{\partial(\mathbf{b}\cdot\mathbf{r})}\mathrm{grad}(\mathbf{b}\cdot\mathbf{r}) \\
&= e^{\mathbf{b}\cdot\mathbf{r}}\mathbf{b}
\end{aligned}
$$

例 2　如 **a** 和 **b** 均为常矢量，证明

$$
\mathrm{div}(\mathbf{a}e^{\mathbf{b}\cdot\mathbf{r}}) = \mathbf{b}\cdot(\mathbf{a}e^{\mathbf{b}\cdot\mathbf{r}})
$$

证:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{div}(\mathbf{a}e^{\mathbf{b}\cdot\mathbf{r}}) &= \nabla\cdot(\mathbf{a}e^{\mathbf{b}\cdot\mathbf{r}}) = \bigtriangledown\cdot(\mathbf{a}e^{\mathbf{b}\cdot\mathbf{r}}) \\
&= \mathbf{a}\cdot\bigtriangledown e^{\mathbf{b}\cdot\mathbf{r}} = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}e^{\mathbf{b}\cdot\mathbf{r}} \\
&= \mathbf{b}\cdot(\mathbf{a}e^{\mathbf{b}\cdot\mathbf{r}}) \qquad (\text{由上例})
\end{aligned}
$$

若 **a** 为变矢量，**b** 仍为常矢量，则

$$
\begin{aligned}
\mathrm{div}\mathbf{a}e^{\mathbf{b}\cdot\mathbf{r}} &= \nabla\cdot\mathbf{a}e^{\mathbf{b}\cdot\mathbf{r}} \\
&= \bigtriangledown\cdot\mathbf{a}e^{\mathbf{b}\cdot\mathbf{r}} \\
&= \bigtriangledown\cdot\mathbf{a}_c e^{\mathbf{b}\cdot\mathbf{r}} + \bigtriangledown\cdot\mathbf{a}e^{\mathbf{b}\cdot\mathbf{r}} \\
&= \mathbf{a}_c\cdot\bigtriangledown e^{\mathbf{b}\cdot\mathbf{r}} + e^{\mathbf{b}\cdot\mathbf{r}}\mathrm{div}\mathbf{a} \\
&= \mathbf{a}_c\cdot e^{\mathbf{b}\cdot\mathbf{r}}\mathbf{b} + e^{\mathbf{b}\cdot\mathbf{r}}\mathrm{div}\mathbf{a} \\
&= \mathbf{b}\cdot(\mathbf{a}e^{\mathbf{b}\cdot\mathbf{r}}) + e^{\mathbf{b}\cdot\mathbf{r}}\mathrm{div}\mathbf{a}
\end{aligned}
$$

例 3　如 **a** 为变矢量，**b** 为常矢量，证明

$$
\mathrm{rot}\mathbf{a}e^{\mathbf{b}\cdot\mathbf{r}} = \nabla\times\mathbf{a}e^{\mathbf{b}\cdot\mathbf{r}} = \mathbf{b}\times\mathbf{a}e^{\mathbf{b}\cdot\mathbf{r}} + e^{\mathbf{b}\cdot\mathbf{r}}\mathrm{rot}\mathbf{a}.
$$

证:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{rot}\mathbf{a}e^{\mathbf{b}\cdot\mathbf{r}} &= \nabla\times\mathbf{a}e^{\mathbf{b}\cdot\mathbf{r}} \\
&= \bigtriangledown\times\mathbf{a}e^{\mathbf{b}\cdot\mathbf{r}} \\
&= \bigtriangledown\times\mathbf{a}_c e^{\mathbf{b}\cdot\mathbf{r}} + \bigtriangledown\times\mathbf{a}(e^{\mathbf{b}\cdot\mathbf{r}})_c \\
&= -\mathbf{a}_c\times\bigtriangledown e^{\mathbf{b}\cdot\mathbf{r}} + e^{\mathbf{b}\cdot\mathbf{r}}\mathrm{rot}\mathbf{a} \\
&= -\mathbf{a}\times\mathbf{b}e^{\mathbf{b}\cdot\mathbf{r}} + e^{\mathbf{b}\cdot\mathbf{r}}\mathrm{rot}\mathbf{a} \\
&= \mathbf{b}\times\mathbf{a}e^{\mathbf{b}\cdot\mathbf{r}} + e^{\mathbf{b}\cdot\mathbf{r}}\mathrm{rot}\mathbf{a}
\end{aligned}
$$

若 **a**,**b** 均为常矢量，则

$$
\mathrm{rot}\mathbf{a}e^{\mathbf{b}\cdot\mathbf{r}} = \nabla\times\mathbf{a}e^{\mathbf{b}\cdot\mathbf{r}} = \mathbf{b}\times\mathbf{a}e^{\mathbf{b}\cdot\mathbf{r}}
$$

结论　关于 $T(\nabla)$ 的所有理论和公式在复矢量情况下均成立。

第五章　并矢代数和并矢的微分、积分

5-1　并矢代数的基本定义

设有两个矢量 **a** 和 **b**. **a** 和 **b** 按一定顺序的组合称为并矢. **a** 在前，**b** 在后的组合用 **ab** 表示，称为 **a** 和 **b** 的并矢. **b** 在前，**a** 在后的组合用 **ba** 表示,称为 **b** 和 **a** 的并矢. 由于顺序不同,**ab** 和 **ba** 是不一样的,不可混淆.

设有并矢 **ab**，则 **ba** 称为 **ab** 的转置. 我们可以立即看出，**ba** 的转置就是 **ab**. 因此，**ab** 和 **ba** 互为转置.

并矢本身除了表示它是两个矢量按一定顺序的组合外，别无其他意义. 它的意义要在和其他矢量与并矢连接时才能表现出来,因此需要明确定义并矢和并矢、并矢和矢量连接的含义.

(1) (**ab**) 和 (**cd**) 两个并矢的点积定义为下列并矢:

$$(\mathbf{ab})\cdot(\mathbf{cd}) = \mathbf{a}(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})\mathbf{d} = (\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})\mathbf{ad} \tag{5-1}$$

即定义为前一个并矢的后项和后一个并矢的前项的点积乘上前一个并矢的前项和后一个并矢的后项所形成的新的并矢.

(2) 并矢 (**ab**) 与矢量 **c** 的点积定义为下列矢量:

$$(\mathbf{ab})\cdot\mathbf{c} = \mathbf{a}(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})$$
$$\mathbf{c}\cdot(\mathbf{ab}) = (\mathbf{c}\cdot\mathbf{a})\mathbf{b} \tag{5-2}$$

即定义为矢量与靠得最近的并矢中的项之点积乘上剩下的矢量.

(3) 并矢 (**ab**) 与矢量 **c** 的叉积定义为下列并矢:

$$(\mathbf{ab})\times\mathbf{c} = \mathbf{a}(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$$
$$\mathbf{c}\times(\mathbf{ab}) = (\mathbf{c}\times\mathbf{a})\mathbf{b} \tag{5-3}$$

即定义为矢量与靠得最近的并矢中的项之叉积(矢量)与剩下矢量所构成的并矢.

(4) 两个并矢的双点积定义为下列标量:

$$(\mathbf{ab}):(\mathbf{cd}) = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{d}) \tag{5-4}$$

即第一、第三个矢量的点积和第二、第四个矢量的点积之间的乘积。

(5) 两个并矢的双叉积定义为下列并矢：

$$(\mathbf{ab})\overset{\times}{\underset{\times}{}}(\mathbf{cd}) = (\mathbf{a}\times\mathbf{c})(\mathbf{b}\times\mathbf{d}) \tag{5-5}$$

即第一、第三个矢量的叉积(矢量)和第二、第四个矢量的叉积(矢量)二者所构成的并矢。

我们可以把并矢的概念加以推广而引入三矢概念。

和并矢的概念相类似，三个按一定顺序给出的矢量集合称为三矢，用符号 (**abc**) 表示。

有了三矢的定义之后，我们就可以引入两个并矢的叉积概念。

两个并矢的叉积定义为下列三矢：

$$(\mathbf{ab})\times(\mathbf{cd}) = \mathbf{a}(\mathbf{b}\times\mathbf{c})\mathbf{d} \tag{5-6}$$

即中间两个矢量的叉积(矢量)和首尾两个矢量按原有顺序所构成的三矢。

5-2 并矢在直角坐标系中的表达式

设有并矢 **ab**，令 **a** 和 **b** 在直角坐标系中的分解式为

$$\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}$$
$$\mathbf{b} = b_x\mathbf{i} + b_y\mathbf{j} + b_z\mathbf{k}$$

式中，**i**, **j**, **k** 为沿 x, y, z 轴正向的单位矢量，a_x, a_y, a_z 为 **a** 在 x, y, z 轴上的投影，b_x, b_y, b_z 为 **b** 在 x, y, z 轴上的投影。于是，**ab** 可写成

$$\mathbf{ab} = (a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k})(b_x\mathbf{i} + b_y\mathbf{j} + b_z\mathbf{k})$$

我们定义 **ab** 在直角坐标系中的表达式为按分配律展开后所得到的九个并矢的集合，即

$$\mathbf{ab} = a_xb_x\mathbf{ii} + a_xb_y\mathbf{ij} + a_xb_z\mathbf{ik}$$

$$+ a_y b_x \mathbf{ji} + a_y b_y \mathbf{jj} + a_y b_z \mathbf{jk}$$
$$+ a_z b_x \mathbf{ki} + a_z a_y \mathbf{kj} + a_z b_z \mathbf{kk} \qquad (5\text{-}7)$$

注意,这里的加号并不代表并矢的和的意义,而只表示所有这些并矢属于同一集合。关于两个两矢的和下面另有定义。

设有一并矢 $\overleftrightarrow{\mathbf{A}}$ 在直角坐标系中的表达式为

$$\overleftrightarrow{\mathbf{A}} = a_{xx}\mathbf{ii} + a_{xy}\mathbf{ij} + a_{xz}\mathbf{ik} + a_{yx}\mathbf{ji} + a_{yy}\mathbf{jj}$$
$$+ a_{yz}\mathbf{jk} + a_{zx}\mathbf{ki} + a_{zy}\mathbf{kj} + a_{zz}\mathbf{kk}$$

根据这个表达式我们虽不能单值地找出构成 $\overleftrightarrow{\mathbf{A}}$ 的 $\mathbf{ab}$ 来，但可以把它写成另外两种由三个并矢构成的集合，即

$$\overleftrightarrow{\mathbf{A}} = (a_{xx}\mathbf{i} + a_{yx}\mathbf{j} + a_{zx}\mathbf{k})\mathbf{i}$$
$$+ (a_{xy}\mathbf{i} + a_{yy}\mathbf{j} + a_{zy}\mathbf{k})\mathbf{j}$$
$$+ (a_{xz}\mathbf{i} + a_{yz}\mathbf{j} + a_{zz}\mathbf{k})\mathbf{k}$$
$$= \mathbf{a}'_x\mathbf{i} + \mathbf{a}'_y\mathbf{j} + \mathbf{a}'_z\mathbf{k}$$

或

$$\overleftrightarrow{\mathbf{A}} = \mathbf{i}(a_{xx}\mathbf{i} + a_{xy}\mathbf{j} + a_{xz}\mathbf{k})$$
$$+ \mathbf{j}(a_{yx}\mathbf{i} + a_{yy}\mathbf{j} + a_{yz}\mathbf{k})$$
$$+ \mathbf{k}(a_{zx}\mathbf{i} + a_{zy}\mathbf{j} + a_{zz}\mathbf{k})$$
$$= \mathbf{i}\mathbf{a}_x + \mathbf{j}\mathbf{a}_y + \mathbf{k}\mathbf{a}_z$$

注意,这里 $\mathbf{a}'_x \neq \mathbf{a}_x$, $\mathbf{a}'_y \neq \mathbf{a}_y$, $\mathbf{a}'_z = \mathbf{a}_z$。

根据转置并矢定义，在直角坐标系的表达式中，如果我们将每个并矢的两个矢量位置互换,那么我们就可得到 $\overleftrightarrow{\mathbf{A}}$ 的转置并矢 $\widetilde{\overleftrightarrow{\mathbf{A}}}$。具体来说，

$$\widetilde{\overleftrightarrow{\mathbf{A}}} = a_{xx}\mathbf{ii} + a_{xy}\mathbf{ji} + a_{xz}\mathbf{ki}$$
$$+ a_{yx}\mathbf{ij} + a_{yy}\mathbf{jj} + a_{yz}\mathbf{kj}$$
$$+ a_{zx}\mathbf{ki} + a_{zy}\mathbf{jk} + a_{zz}\mathbf{kk}$$
$$= \mathbf{a}_x\mathbf{i} + \mathbf{a}_y\mathbf{j} + \mathbf{a}_z\mathbf{k}$$
$$= \mathbf{i}\mathbf{a}'_x + \mathbf{j}\mathbf{a}'_y + \mathbf{k}\mathbf{a}'_z \qquad (5\text{-}8)$$

从 $\overleftrightarrow{\mathbf{A}}$ 和 $\widetilde{\overleftrightarrow{\mathbf{A}}}$ 的表达式中可以看出，只有当

$$a_{ik} = a_{ki} \quad (i,k = 1,2,3)$$

时，$\overleftrightarrow{\mathbf{A}} = \widetilde{\overleftrightarrow{\mathbf{A}}}$. 这样的并矢称为对称并矢。如果

$$a_{ik} = -a_{ki} \ (i,k = 1,2,3)$$

则 $\overleftrightarrow{\mathbf{A}} = -\widetilde{\overleftrightarrow{\mathbf{A}}}$. 这样的并矢称为反对称并矢。

最后，我们引入恒等并矢的概念。

恒等并矢定义为下列并矢：

$$\ddot{\mathbf{I}} = \mathbf{ii} + \mathbf{jj} + \mathbf{kk}$$

另外，还有一个常用的称为并矢的迹的量. 并矢的迹定义为下列标量：

$$|\overleftrightarrow{\mathbf{A}}| = a_{xx} + a_{yy} + a_{zz} \tag{5-9}$$

即 **ii**,**jj**,**kk** 三个并矢的系数之和.

5-3　并矢代数恒等式

根据上一节关于并矢、三矢的定义和运算规则，可以推导出一系列并矢代数中常用的恒等式。现将它们列举如下供读者查阅。

令 **a**,**b** 为矢量，$\overleftrightarrow{\mathbf{A}}$,$\overleftrightarrow{\mathbf{B}}$ 为并矢，$\ddot{\mathbf{I}}$ 为恒等并矢. 并令 $\overleftrightarrow{\mathbf{A}}$,$\overleftrightarrow{\mathbf{B}}$,$\ddot{\mathbf{I}}$ 的展开形式为：

$$\overleftrightarrow{\mathbf{A}} = (\mathbf{cd})$$
$$\overleftrightarrow{\mathbf{B}} = (\mathbf{ef})$$
$$\ddot{\mathbf{I}} = \mathbf{ii} + \mathbf{jj} + \mathbf{kk}$$

下列恒等式成立：

(1) $(\mathbf{a} \cdot \overleftrightarrow{\mathbf{A}}) \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot (\overleftrightarrow{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot \overleftrightarrow{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{b}$ (标量) (5-10)

证：

$$\begin{aligned}(\mathbf{a} \cdot \overleftrightarrow{\mathbf{A}}) \cdot \mathbf{b} &= [\mathbf{a} \cdot (\mathbf{cd})] \cdot \mathbf{b} = [(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{d}] \cdot \mathbf{b} \\ &= (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{d} \cdot \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot [\mathbf{c}(\mathbf{d} \cdot \mathbf{b})] \\ &= \mathbf{a} \cdot [(\mathbf{cd}) \cdot \mathbf{b}] = \mathbf{a} \cdot (\overleftrightarrow{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{b})\end{aligned}$$

(2) $(\mathbf{a} \times \overleftrightarrow{\mathbf{A}}) \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times (\overleftrightarrow{\mathbf{A}} \times \mathbf{b}) = \mathbf{a} \times \overleftrightarrow{\mathbf{A}} \times \mathbf{b}$ (并矢) (5-11)

证：

$$(\mathbf{a}\times\overleftrightarrow{\mathbf{A}})\times\mathbf{b}=[\mathbf{a}\times(\mathbf{cd})]\times\mathbf{b}=(\mathbf{a}\times\mathbf{c})\mathbf{d}\times\mathbf{b}$$
$$=(\mathbf{a}\times\mathbf{c})(\mathbf{d}\times\mathbf{b})=\mathbf{a}\times[\mathbf{c}(\mathbf{d}\times\mathbf{b})]$$
$$=\mathbf{a}\times[(\mathbf{cd})\times\mathbf{b}]=\mathbf{a}\times(\overleftrightarrow{\mathbf{A}}\times\mathbf{b})$$

(3) $(\mathbf{a}\times\overleftrightarrow{\mathbf{A}})\cdot\mathbf{b}=\mathbf{a}\times(\overleftrightarrow{\mathbf{A}}\cdot\mathbf{b})=\mathbf{a}\times\overleftrightarrow{\mathbf{A}}\cdot\mathbf{b}$ (矢量) (5-12)

证:

$$(\mathbf{a}\times\overleftrightarrow{\mathbf{A}})\cdot\mathbf{b}=[\mathbf{a}\times(\mathbf{cd})]\cdot\mathbf{b}=[(\mathbf{a}\times\mathbf{c})\mathbf{d}]\cdot\mathbf{b}$$
$$=(\mathbf{a}\times\mathbf{c})(\mathbf{d}\cdot\mathbf{b})=\mathbf{a}\times[\mathbf{c}(\mathbf{d}\cdot\mathbf{b})]$$
$$=\mathbf{a}\times[(\mathbf{cd})\cdot\mathbf{b}]=\mathbf{a}\times(\overleftrightarrow{\mathbf{A}}\cdot\mathbf{b})$$

(4) $(\mathbf{a}\cdot\overleftrightarrow{\mathbf{A}})\times\mathbf{b}=\mathbf{a}\cdot(\overleftrightarrow{\mathbf{A}}\times\mathbf{b})=\mathbf{a}\cdot\overleftrightarrow{\mathbf{A}}\times\mathbf{b}$ (矢量) (5-13)

证:

$$(\mathbf{a}\cdot\overleftrightarrow{\mathbf{A}})\times\mathbf{b}=[\mathbf{a}\cdot(\mathbf{cd})]\times\mathbf{b}=[(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})\mathbf{d}]\times\mathbf{b}$$
$$=(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})(\mathbf{d}\times\mathbf{b})=\mathbf{a}\cdot[\mathbf{c}(\mathbf{d}\times\mathbf{b})]$$
$$=\mathbf{a}\cdot[(\mathbf{cd})\times\mathbf{b}]=\mathbf{a}\cdot(\overleftrightarrow{\mathbf{A}}\times\mathbf{b})$$

以上几个公式表明，如在并矢旁有两个矢量分别位于左右两边,则不论这并矢以什么样的乘积与两矢量相连,既可以先与右边的矢量运算,再和左边的矢量运算，也可以先与左边的矢量运算，再和右边的矢量运算,其结果是一样的,因此可以略去表示先运算的括号，运算顺序可按需要选择.

(5) $(\mathbf{a}\cdot\overleftrightarrow{\mathbf{A}})\cdot\overleftrightarrow{\mathbf{B}}=\mathbf{a}\cdot(\overleftrightarrow{\mathbf{A}}\cdot\overleftrightarrow{\mathbf{B}})=\mathbf{a}\cdot\overleftrightarrow{\mathbf{A}}\cdot\overleftrightarrow{\mathbf{B}}$(矢量) (5-14)

证:

$$(\mathbf{a}\cdot\overleftrightarrow{\mathbf{A}})\cdot\overleftrightarrow{\mathbf{B}}=[\mathbf{a}\cdot(\mathbf{cd})]\cdot(\mathbf{ef})=[(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})\mathbf{d}]\cdot(\mathbf{ef})$$
$$=(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})(\mathbf{d}\cdot\mathbf{e})\mathbf{f}=\mathbf{a}\cdot[\mathbf{c}(\mathbf{d}\cdot\mathbf{e})\mathbf{f}]$$
$$=(\mathbf{a}\cdot(\mathbf{cd})\cdot(\mathbf{ef}))=\mathbf{a}\cdot(\overleftrightarrow{\mathbf{A}}\cdot\overleftrightarrow{\mathbf{B}})$$

(6) $(\overleftrightarrow{\mathbf{A}}\cdot\overleftrightarrow{\mathbf{B}})\cdot\mathbf{a}=\overleftrightarrow{\mathbf{A}}\cdot(\overleftrightarrow{\mathbf{B}}\cdot\mathbf{a})=\overleftrightarrow{\mathbf{A}}\cdot\overleftrightarrow{\mathbf{B}}\cdot\mathbf{a}$(矢量) (5-15)

证:

$$(\overleftrightarrow{\mathbf{A}}\cdot\overleftrightarrow{\mathbf{B}})\cdot\mathbf{a}=[(\mathbf{cd})\cdot(\mathbf{ef})]\cdot\mathbf{a}=[\mathbf{c}(\mathbf{d}\cdot\mathbf{e})\mathbf{f}]\cdot\mathbf{a}$$
$$=\mathbf{c}(\mathbf{d}\cdot\mathbf{e})(\mathbf{f}\cdot\mathbf{a})=(\mathbf{cd})\cdot[\mathbf{e}(\mathbf{f}\cdot\mathbf{a})]$$
$$=(\mathbf{cd})\cdot[(\mathbf{ef})\cdot\mathbf{a}]=\overleftrightarrow{\mathbf{A}}\cdot(\overleftrightarrow{\mathbf{B}}\cdot\mathbf{a})$$

(7) $(\mathbf{a}\times\overleftrightarrow{\mathbf{A}})\cdot\overleftrightarrow{\mathbf{B}}=\mathbf{a}\times(\overleftrightarrow{\mathbf{A}}\cdot\overleftrightarrow{\mathbf{B}})=\mathbf{a}\times\overleftrightarrow{\mathbf{A}}\cdot\overleftrightarrow{\mathbf{B}}$(并矢)

(5-16)

证:

$$\begin{aligned}(\mathbf{a}\times\overleftrightarrow{\mathbf{A}})\cdot\overleftrightarrow{\mathbf{B}}&=[\mathbf{a}\times(\mathbf{cd})]\cdot(\mathbf{ef})\\&=[(\mathbf{a}\times\mathbf{c})\mathbf{d}]\cdot(\mathbf{ef})=(\mathbf{a}\times\mathbf{c})(\mathbf{d}\cdot\mathbf{e})\mathbf{f}\\&=\mathbf{a}\times[\mathbf{c}(\mathbf{d}\cdot\mathbf{e})\mathbf{f}]=\mathbf{a}\times[(\mathbf{cd})\cdot(\mathbf{ef})]\\&=\mathbf{a}\times(\overleftrightarrow{\mathbf{A}}\cdot\overleftrightarrow{\mathbf{B}})\end{aligned}$$

(8) $(\overleftrightarrow{\mathbf{A}}\cdot\overleftrightarrow{\mathbf{B}})\times\mathbf{a}=\overleftrightarrow{\mathbf{A}}\cdot(\overleftrightarrow{\mathbf{B}}\times\mathbf{a})=\overleftrightarrow{\mathbf{A}}\cdot\overleftrightarrow{\mathbf{B}}\times\mathbf{a}$ (并矢)

(5-17)

证:

$$\begin{aligned}(\overleftrightarrow{\mathbf{A}}\cdot\overleftrightarrow{\mathbf{B}})\times\mathbf{a}&=[(\mathbf{cd})\cdot(\mathbf{ef})]\times\mathbf{a}\\&=[\mathbf{c}(\mathbf{d}\cdot\mathbf{e})\mathbf{f}]\times\mathbf{a}=\mathbf{c}(\mathbf{d}\cdot\mathbf{e})(\mathbf{f}\times\mathbf{a})\\&=(\mathbf{cd})\cdot[\mathbf{e}(\mathbf{f}\times\mathbf{a})]=(\mathbf{cd})\cdot[(\mathbf{ef})\times\mathbf{a}]\\&=\overleftrightarrow{\mathbf{A}}\cdot(\overleftrightarrow{\mathbf{B}}\times\mathbf{a})\end{aligned}$$

(9) $(\mathbf{a}\cdot\overleftrightarrow{\mathbf{A}})\times\overleftrightarrow{\mathbf{B}}=\mathbf{a}\cdot(\overleftrightarrow{\mathbf{A}}\times\overleftrightarrow{\mathbf{B}})=\mathbf{a}\cdot\overleftrightarrow{\mathbf{A}}\times\overleftrightarrow{\mathbf{B}}$ (并矢)

(5-18)

证:

$$\begin{aligned}(\mathbf{a}\cdot\overleftrightarrow{\mathbf{A}})\times\overleftrightarrow{\mathbf{B}}&=[\mathbf{a}\cdot(\mathbf{cd})]\times(\mathbf{ef})=(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})(\mathbf{d}\times\mathbf{e})\mathbf{f}\\&=\mathbf{a}\cdot[\mathbf{c}(\mathbf{d}\times\mathbf{e})\mathbf{f}]=\mathbf{a}\cdot[(\mathbf{cd})\times(\mathbf{ef})]\\&=\mathbf{a}\cdot(\overleftrightarrow{\mathbf{A}}\times\overleftrightarrow{\mathbf{B}})\end{aligned}$$

(10) $(\mathbf{a}\times\overleftrightarrow{\mathbf{A}})\times\overleftrightarrow{\mathbf{B}}=\mathbf{a}\times(\overleftrightarrow{\mathbf{A}}\times\overleftrightarrow{\mathbf{B}})=\mathbf{a}\times\overleftrightarrow{\mathbf{A}}\times\overleftrightarrow{\mathbf{B}}$(三矢)

(5-19)

证:

$$\begin{aligned}(\mathbf{a}\times\overleftrightarrow{\mathbf{A}})\times\overleftrightarrow{\mathbf{B}}&=[\mathbf{a}\times(\mathbf{cd})]\times(\mathbf{ef})\\&=[(\mathbf{a}\times\mathbf{c})\mathbf{d}]\times(\mathbf{ef})=(\mathbf{a}\times\mathbf{c})(\mathbf{d}\times\mathbf{e})\mathbf{f}\\&=\mathbf{a}\times[\mathbf{c}(\mathbf{d}\times\mathbf{e})\mathbf{f}]=\mathbf{a}\times(\mathbf{cd})\times(\mathbf{ef})\\&=\mathbf{a}\times(\overleftrightarrow{\mathbf{A}}\times\overleftrightarrow{\mathbf{B}})\end{aligned}$$

式(5.14)～(5.19)表明,如果有两个并列的并矢，且在其左边或右边有一矢量，则不管矢量和并矢之间或并矢之间用什么样的乘积号相连,运算顺序是无关紧要的,就是说,可以先进行并矢之间

的运算，所得结果再和矢量进行运算，也可以先进行矢量和并矢之间的运算，所得结果再和另一并矢进行运算，最后的结果是一样的.

(11) $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \overleftrightarrow{\mathbf{A}}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \overleftrightarrow{\mathbf{A}}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\overleftrightarrow{\mathbf{A}}$ (5-20)

证：

$$\begin{aligned}
\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \overleftrightarrow{\mathbf{A}}) &= \mathbf{a} \times [\mathbf{b} \times (\mathbf{cd})] = \mathbf{a} \times [(\mathbf{b} \times \mathbf{c})\mathbf{d}] \\
&= [\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})]\mathbf{d} \\
&= [\mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})]\mathbf{d} \\
&= (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{bd} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{cd} \\
&= [\mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{d}] - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\overleftrightarrow{\mathbf{A}} \\
&= \mathbf{b}[\mathbf{a} \cdot (\mathbf{cd})] - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\overleftrightarrow{\mathbf{A}} \\
&= \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \overleftrightarrow{\mathbf{A}}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\overleftrightarrow{\mathbf{A}}
\end{aligned}$$

(12) $(\overleftrightarrow{\mathbf{A}} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = \overleftrightarrow{\mathbf{A}} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = -\overleftrightarrow{\mathbf{A}} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{a})$

$= -(\overleftrightarrow{\mathbf{A}} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{a}$ (5-21)

证：

$$\begin{aligned}
(\overleftrightarrow{\mathbf{A}} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} &= [(\mathbf{cd}) \times \mathbf{a}] \cdot \mathbf{b} = [\mathbf{c}(\mathbf{d} \times \mathbf{a})] \cdot \mathbf{b} \\
&= \mathbf{c}[(\mathbf{d} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b}] \\
&= \mathbf{c}[(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{d}] \\
&= \mathbf{c}[\mathbf{d} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})] \\
&= (\mathbf{cd}) \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \\
&= \overleftrightarrow{\mathbf{A}} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \\
&= -\overleftrightarrow{\mathbf{A}} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{a})
\end{aligned}$$

同理

$$\begin{aligned}
(\overleftrightarrow{\mathbf{A}} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} &= [(\mathbf{cd}) \times \mathbf{a}] \cdot \mathbf{b} \\
&= [\mathbf{c}(\mathbf{d} \times \mathbf{a})] \cdot \mathbf{b} \\
&= -[\mathbf{c}(\mathbf{a} \times \mathbf{d})] \cdot \mathbf{b} \\
&= -\mathbf{c}[(\mathbf{a} \times \mathbf{d}) \cdot \mathbf{b}] \\
&= -\mathbf{c}[(\mathbf{d} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{a}] \\
&= -[\mathbf{c}(\mathbf{d} \times \mathbf{b})] \cdot \mathbf{a} \\
&= -[(\mathbf{cd}) \times \mathbf{b}] \cdot \mathbf{a} \\
&= -(\overleftrightarrow{\mathbf{A}} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{a}
\end{aligned}$$

(13) $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\overleftrightarrow{\mathbf{A}}=\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\overleftrightarrow{\mathbf{A}})=-\mathbf{b}\cdot(\mathbf{a}\times\overleftrightarrow{\mathbf{A}})$ (5-22)

证：

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\overleftrightarrow{\mathbf{A}}&=(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot(\mathbf{cd})=[(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}]\mathbf{d}\\
&=[\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})]\mathbf{d}=\mathbf{a}\cdot[(\mathbf{b}\times\mathbf{c})\mathbf{d}]\\
&=\mathbf{a}\cdot[\mathbf{b}\times(\mathbf{cd})]=\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\overleftrightarrow{\mathbf{A}})
\end{aligned}
$$

同理

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\overleftrightarrow{\mathbf{A}}&=(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot(\mathbf{cd})=[(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}]\mathbf{d}\\
&=-[(\mathbf{b}\times\mathbf{a})\cdot\mathbf{c}]\mathbf{d}=-[\mathbf{b}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{c})]\mathbf{d}\\
&=-\mathbf{b}\cdot[(\mathbf{a}\times\mathbf{c})\mathbf{d}]=-\mathbf{b}\cdot[\mathbf{a}\times(\mathbf{cd})]\\
&=-\mathbf{b}\cdot(\mathbf{a}\times\overleftrightarrow{\mathbf{A}})
\end{aligned}
$$

(14) $(\overleftrightarrow{\mathbf{A}}\times\mathbf{a})\cdot\overleftrightarrow{\mathbf{B}}=\overleftrightarrow{\mathbf{A}}\cdot(\mathbf{a}\times\overleftrightarrow{\mathbf{B}})$ (5-23)

证：

$$
\begin{aligned}
(\overleftrightarrow{\mathbf{A}}\times\mathbf{a})\cdot\overleftrightarrow{\mathbf{B}}&=[(\mathbf{cd})\times\mathbf{a}]\cdot(\mathbf{ef})\\
&=[\mathbf{c}(\mathbf{d}\times\mathbf{a})]\cdot(\mathbf{ef})\\
&=\mathbf{c}[(\mathbf{d}\times\mathbf{a})\cdot\mathbf{e}]\mathbf{f}\\
&=\mathbf{c}[\mathbf{d}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{e})]\mathbf{f}\\
&=[(\mathbf{cd})\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{e})]\mathbf{f}\\
&=(\mathbf{cd})\cdot[\mathbf{a}\times(\mathbf{ef})]\\
&=\overleftrightarrow{\mathbf{A}}\cdot(\mathbf{a}\times\overleftrightarrow{\mathbf{B}})
\end{aligned}
$$

公式(5.20)～(5.23)表明，如果表达式中有一个并矢在左边或右边，或者有两个并矢分别位于左、右两端，则在保持并矢相对位置不变的前提下，可把并矢看成普通矢量，用矢量代数的公式对表达式进行变换。

(15) $(\mathbf{b}\times\mathbf{a})\times\mathbf{c}=(\mathbf{ab}-\mathbf{ba})\cdot\mathbf{c}$ (5-24)

证：

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{b}\times\mathbf{a})\times\mathbf{c}&=\mathbf{a}(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})-\mathbf{b}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})\\
&=(\mathbf{ab})\cdot\mathbf{c}-(\mathbf{ba})\cdot\mathbf{c}\\
&=(\mathbf{ab}-\mathbf{ba})\cdot\mathbf{c}
\end{aligned}
$$

(16) $\mathbf{a}\cdot\widetilde{\overleftrightarrow{\mathbf{B}}}=\widetilde{\overleftrightarrow{\mathbf{B}}}\cdot\mathbf{a}$ (5-25)

证：

$$\mathbf{a}\cdot\overleftrightarrow{\mathbf{B}}=[\mathbf{a}\cdot(\mathbf{ef})]$$
$$=(\mathbf{a}\cdot\mathbf{e})\mathbf{f}=\mathbf{f}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{e})$$
$$=\mathbf{f}(\mathbf{e}\cdot\mathbf{a})=(\mathbf{fe})\cdot\mathbf{a}$$
$$=\widetilde{\overleftrightarrow{\mathbf{B}}}\cdot\mathbf{a}$$

因如 $\overleftrightarrow{\mathbf{B}}=\mathbf{ef}$，则 $\widetilde{\overleftrightarrow{\mathbf{B}}}=\mathbf{fe}$

(17) $\mathbf{a}\cdot\overleftrightarrow{\mathbf{A}}\cdot\mathbf{b}=\mathbf{b}\cdot\widetilde{\overleftrightarrow{\mathbf{A}}}\cdot\mathbf{a}$ (5-26)

证：

$$(\mathbf{a}\cdot\overleftrightarrow{\mathbf{A}})\cdot\mathbf{b}=[\mathbf{a}\cdot(\mathbf{cd})]\cdot\mathbf{b}$$
$$=[(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})\mathbf{d}]\cdot\mathbf{b}=(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})(\mathbf{d}\cdot\mathbf{b})$$
$$=(\mathbf{c}\cdot\mathbf{a})(\mathbf{d}\cdot\mathbf{b})=\mathbf{c}(\mathbf{d}\cdot\mathbf{b})\cdot\mathbf{a}$$
$$=[(\mathbf{cd})\cdot\mathbf{b}]\cdot\mathbf{a}=(\overleftrightarrow{\mathbf{A}}\cdot\mathbf{b})\cdot\mathbf{a}$$
$$=\mathbf{b}\cdot\widetilde{\overleftrightarrow{\mathbf{A}}}\cdot\mathbf{a}$$

(18) $\mathbf{a}\times\overleftrightarrow{\mathbf{B}}=-[\widetilde{(\widetilde{\overleftrightarrow{\mathbf{B}}}\times\mathbf{a})}]$ (5-27)

证：

$$\mathbf{a}\times\overleftrightarrow{\mathbf{B}}=(\mathbf{a}\times(\mathbf{ef}))=(\mathbf{a}\times\mathbf{e})\mathbf{f}$$
$$=-(\mathbf{e}\times\mathbf{a})\mathbf{f}=-[\widetilde{\mathbf{f}(\mathbf{e}\times\mathbf{a})}]$$
$$=-[\widetilde{(\mathbf{fe})\times\mathbf{a}}]$$
$$=-[\widetilde{\widetilde{\overleftrightarrow{\mathbf{B}}}\times\mathbf{a}}]$$

(19) $\widetilde{\overleftrightarrow{\mathbf{C}}}\cdot(\mathbf{a}\times\overleftrightarrow{\mathbf{B}})=-\widetilde{(\mathbf{a}\times\overleftrightarrow{\mathbf{C}})}\cdot\overleftrightarrow{\mathbf{B}}$ (5-28)

证：

$$\widetilde{\overleftrightarrow{\mathbf{C}}}\cdot(\mathbf{a}\times\overleftrightarrow{\mathbf{B}})=(\widetilde{\overleftrightarrow{\mathbf{C}}}\times\mathbf{a})\cdot\overleftrightarrow{\mathbf{B}}\qquad[\text{公式}(5\text{-}23)]$$
$$=-\widetilde{(\mathbf{a}\times\overleftrightarrow{\mathbf{C}})}\cdot\overleftrightarrow{\mathbf{B}}\qquad[\text{公式}(5\text{-}27)]$$

下面推导几个有关恒等并矢的等式。第一个等式尤为重要，它是推导其他等式的基础。

(20) $\overleftrightarrow{\mathbf{I}} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a} \cdot \overleftrightarrow{\mathbf{I}} = \mathbf{a}$ (5-29)

证：根据恒等并矢的定义，

$$\overleftrightarrow{\mathbf{I}} = \mathbf{ii} + \mathbf{jj} + \mathbf{kk}$$

于是

$$\begin{aligned}\overleftrightarrow{\mathbf{I}} \cdot \mathbf{a} &= (\mathbf{ii} + \mathbf{jj} + \mathbf{kk}) \cdot \mathbf{a} \\ &= \mathbf{i}a_x + \mathbf{j}a_y + \mathbf{k}a_z = \mathbf{a} \\ \mathbf{a} \cdot \overleftrightarrow{\mathbf{I}} &= \mathbf{a} \cdot (\mathbf{ii} + \mathbf{jj} + \mathbf{kk}) \\ &= a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k} = \mathbf{a}\end{aligned}$$

两式相比较，即得证。

(21) $\overleftrightarrow{\mathbf{I}} \cdot \overleftrightarrow{\mathbf{A}} = \overleftrightarrow{\mathbf{A}} \cdot \overleftrightarrow{\mathbf{I}} = \overleftrightarrow{\mathbf{A}}$ (5-30)

证：

$$\begin{aligned}\overleftrightarrow{\mathbf{I}} \cdot \overleftrightarrow{\mathbf{A}} &= \overleftrightarrow{\mathbf{I}} \cdot (\mathbf{ia}_x + \mathbf{ja}_y + \mathbf{ka}_z) \\ &= (\overleftrightarrow{\mathbf{I}} \cdot \mathbf{i})\mathbf{a}_x + (\overleftrightarrow{\mathbf{I}} \cdot \mathbf{j})\mathbf{a}_y + (\overleftrightarrow{\mathbf{I}} \cdot \mathbf{k})\mathbf{a}_z \\ &= \mathbf{ia}_x + \mathbf{ja}_y + \mathbf{ka}_z \text{ [公式(5-29)]} \\ &= \overleftrightarrow{\mathbf{A}} \\ \overleftrightarrow{\mathbf{A}} \cdot \overleftrightarrow{\mathbf{I}} &= (\mathbf{ia}_x + \mathbf{ja}_y + \mathbf{ka}_z) \cdot \overleftrightarrow{\mathbf{I}} \\ &= \mathbf{i}(\mathbf{a}_x \cdot \overleftrightarrow{\mathbf{I}}) + \mathbf{j}(\mathbf{a}_y \cdot \overleftrightarrow{\mathbf{I}}) + \mathbf{k}(\mathbf{a}_z \cdot \overleftrightarrow{\mathbf{I}}) \\ &= \mathbf{ia}_x + \mathbf{ja}_y + \mathbf{ka}_z = \overleftrightarrow{\mathbf{A}} \quad \text{[公式(5-20)]}\end{aligned}$$

(22) $\overleftrightarrow{\mathbf{I}} \times \mathbf{a} = \mathbf{a} \times \overleftrightarrow{\mathbf{I}}$ (5-31)

证：

$$\begin{aligned}\overleftrightarrow{\mathbf{I}} \times \mathbf{a} &= (\overleftrightarrow{\mathbf{I}} \times \mathbf{a}) \cdot \overleftrightarrow{\mathbf{I}} \quad \text{[公式(5-30)]} \\ &= \overleftrightarrow{\mathbf{I}} \cdot (\mathbf{a} \times \overleftrightarrow{\mathbf{I}}) \quad \text{[公式(5-23)]} \\ &= \mathbf{a} \times \overleftrightarrow{\mathbf{I}} \quad \text{[公式(5-30)]}\end{aligned}$$

(23) $(\overleftrightarrow{\mathbf{I}} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot (\overleftrightarrow{\mathbf{I}} \times \mathbf{b}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ (5-32)

证：

$$\begin{aligned}(\overleftrightarrow{\mathbf{I}} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} &= \overleftrightarrow{\mathbf{I}} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} \\ &= (\mathbf{a} \cdot \overleftrightarrow{\mathbf{I}}) \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot (\overleftrightarrow{\mathbf{I}} \times \mathbf{b})\end{aligned}$$

(24) $\overleftrightarrow{\mathbf{I}} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{ba} - \mathbf{ab}$ (5-33)

证：

$$\mathbf{I} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (\overleftrightarrow{\mathbf{I}} \cdot \mathbf{b})\mathbf{a} - (\overleftrightarrow{\mathbf{I}} \cdot \mathbf{a})\mathbf{b} = \mathbf{ba} - \mathbf{ab}$$

(25) $(\overleftrightarrow{\mathbf{I}} \times \mathbf{a}) \cdot \overleftrightarrow{\mathbf{A}} = \mathbf{a} \times \overleftrightarrow{\mathbf{A}} = (\mathbf{a} \times \overleftrightarrow{\mathbf{I}}) \cdot \overleftrightarrow{\mathbf{A}}$ (5-34)

证:

$$(\overleftrightarrow{\mathbf{I}}\times\mathbf{a})\cdot\overleftrightarrow{\mathbf{A}}=\overleftrightarrow{\mathbf{I}}\cdot(\mathbf{a}\times\overleftrightarrow{\mathbf{A}})=\mathbf{a}\times\overleftrightarrow{\mathbf{A}}$$
$$=\mathbf{a}\times(\overleftrightarrow{\mathbf{I}}\cdot\overleftrightarrow{\mathbf{A}})=(\mathbf{a}\times\overleftrightarrow{\mathbf{I}})\cdot\overleftrightarrow{\mathbf{A}}$$

5-4 并矢的和、差、微分及积分

有了并矢在直角坐标中的表达式以后，我们现在来给出并矢的和、差、微分及积分的定义。

设有并矢 $\overleftrightarrow{\mathbf{A}}$ 和 $\overleftrightarrow{\mathbf{B}}$，其在直角坐标系中的表达式如下:

$$\begin{aligned}\overleftrightarrow{\mathbf{A}}=&\ a_{xx}\mathbf{ii}+a_{xy}\mathbf{ij}+a_{xz}\mathbf{ik}\\&+a_{yx}\mathbf{ji}+a_{yy}\mathbf{jj}+a_{yz}\mathbf{jk}\\&+a_{zx}\mathbf{ki}+a_{zy}\mathbf{kj}+a_{zz}\mathbf{kk}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overleftrightarrow{\mathbf{B}}=&\ b_{xx}\mathbf{ii}+b_{xy}\mathbf{ij}+b_{xz}\mathbf{ik}\\&+b_{yx}\mathbf{ji}+b_{yy}\mathbf{jj}+b_{yz}\mathbf{jk}\\&+b_{zx}\mathbf{ki}+b_{zy}\mathbf{kj}+b_{zz}\mathbf{kk}\end{aligned}$$

$\overleftrightarrow{\mathbf{A}}$ 和 $\overleftrightarrow{\mathbf{B}}$ 的和定义为下列并矢:

$$\begin{aligned}\overleftrightarrow{\mathbf{A}}+\overleftrightarrow{\mathbf{B}}=&\ (a_{xx}+b_{xx})\mathbf{ii}+(a_{xy}+b_{xy})\mathbf{ij}\\&+(a_{xz}+b_{xz})\mathbf{ik}+(a_{yx}+b_{yx})\mathbf{ji}\\&+(a_{yy}+b_{yy})\mathbf{jj}+(a_{yz}+b_{yz})\mathbf{jk}\\&+(a_{zx}+b_{zx})\mathbf{ki}+(a_{zy}+b_{zy})\mathbf{kj}\\&+(a_{zz}+b_{zz})\mathbf{kk}\end{aligned}\tag{5-35}$$

即定义为由单位矢量的并矢(共九个)所相应的系数之和得到的并矢。

与此相类似，$\overleftrightarrow{\mathbf{A}}$ 和 $\overleftrightarrow{\mathbf{B}}$ 的差定义为下列并矢:

$$\begin{aligned}\overleftrightarrow{\mathbf{A}}-\overleftrightarrow{\mathbf{B}}=&\ (a_{xx}-b_{xx})\mathbf{ii}+(a_{xy}-b_{xy})\mathbf{ij}\\&+(a_{xz}-b_{xz})\mathbf{ik}+(a_{yx}-b_{yx})\mathbf{ji}\\&+(a_{yy}-b_{yy})\mathbf{jj}+(a_{yz}-b_{yz})\mathbf{jk}\\&+(a_{zx}-b_{zx})\mathbf{ki}+(a_{zy}-b_{zy})\mathbf{kj}\\&+(a_{zz}-b_{zz})\mathbf{kk}\end{aligned}\tag{5-36}$$

有了并矢的和、差概念之后，与微积分学完全一样，我们来引

入并矢的微分和积分的概念。

并矢 $\overleftrightarrow{\mathbf{A}}(x,y,z)$ 对 x 的偏微分定义如下：

$$\frac{\partial \overleftrightarrow{\mathbf{A}}}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\overleftrightarrow{\mathbf{A}}(x+\Delta x,y,z)-\overleftrightarrow{\mathbf{A}}(x,y,z)}{\Delta x} \tag{5-37}$$

最后得到的仍旧是一个并矢。

如果并矢写成 $\mathbf{ab}$，则根据 $\mathbf{ab}$ 在直角坐标系中的表达式立即可以证明

$$\frac{\partial(\mathbf{ab})}{\partial x}=\left(\mathbf{a}\,\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial x}\right)+\left(\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial x}\,\mathbf{b}\right) \tag{5-38}$$

并矢的积分，我们以面积分为例，定义如下：

$$\int_S \overleftrightarrow{\mathbf{A}}dS=\sum_{\Delta S_i\to 0}\overleftrightarrow{\mathbf{A}}\Delta S_i \tag{5-39}$$

实际上这就是并矢和的极限，仍然是一个并矢。

有了并矢的和、差、微分及积分概念之后，我们就有了系统地分析并矢的基础。在下一章中，与矢量分析相类似，我们将引入矢量梯度、并矢的散度和旋度概念，并证明并矢函数的符号运算法，以便对并矢函数得出一种简便的运算方法。

第六章　并矢分析及其符号运算法

6-1　并矢分析中几个基本场函数的定义

并矢分析的结构和矢量分析的结构有许多相似的地方，例如矢量分析中的基本场函数是标量场 φ 的梯度 $\mathrm{grad}\varphi$、矢量场 $\mathbf{R}$ 的散度 $\mathrm{div}\,\mathbf{R}$ 和矢量场 $\mathbf{R}$ 的旋度 $\mathrm{rot}\,\mathbf{R}$，而并矢分析中的基本场函数则是矢量 $\mathbf{a}$ 的梯度 $\mathrm{grad}\,\mathbf{a}$、并矢场 $\overleftrightarrow{\mathbf{A}}$ 的散度 $\mathrm{div}\,\overleftrightarrow{\mathbf{A}}$ 和并矢场 $\overleftrightarrow{\mathbf{A}}$ 的旋度 $\mathrm{rot}\,\overleftrightarrow{\mathbf{A}}$ 等等。因此可以说，并矢分析是矢量分析的"升级"，即微分对象由标量升为矢量，由矢量升为并矢。

为了进一步说明问题，先重复一下以前用过的符号。令

$$\varphi = \varphi(x,y,z)\text{为标量函数.}$$

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}(x,y,z) = \mathbf{i}a_x + \mathbf{j}a_y + \mathbf{k}a_z$$

$$\mathbf{b} = \mathbf{b}(x,y,z) = \mathbf{i}b_x + \mathbf{j}b_y + \mathbf{k}b_z$$

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}(x,y,z) = \mathbf{i}R_x + \mathbf{j}R_y + \mathbf{k}R_z$$

为矢量函数，

$$\begin{aligned}\overleftrightarrow{\mathbf{A}} &= \mathbf{i}\mathbf{a}_x + \mathbf{j}\mathbf{a}_y + \mathbf{k}\mathbf{a}_z \\ &= \mathbf{a}'_x\mathbf{i} + \mathbf{a}'_y\mathbf{j} + \mathbf{a}'_z\mathbf{k} \\ &= \mathbf{ii}a_{xx} + \mathbf{ij}a_{xy} + \mathbf{ik}a_{xz} \\ &\quad + \mathbf{ji}a_{yx} + \mathbf{jj}a_{yy} + \mathbf{jk}a_{yz} \\ &\quad + \mathbf{ki}a_{zx} + \mathbf{kj}a_{zy} + \mathbf{kk}a_{zz}\end{aligned}$$

为并矢函数。式中，$\mathbf{a}_x,\mathbf{a}_y,\mathbf{a}_z,\mathbf{a}'_x,\mathbf{a}'_y,\mathbf{a}'_z$ 为矢量函数；a_{xx} 等为标量函数。注意，这里在 $\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}$ 右边的矢量用 $\mathbf{a}_x$, $\mathbf{a}_y$, $\mathbf{a}_z$ 表示(不带撇号)，而在 $\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}$ 左边的则用 $\mathbf{a}'_x,\mathbf{a}'_y,\mathbf{a}'_z$ 表示(带撇号)。

在矢量分析中，标量函数 φ 的梯度定义为

$$\mathrm{grad}\varphi = \nabla\varphi = \mathbf{i}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial\varphi}{\partial z}$$

与此相对应,在并矢分析中,矢量函数 $\mathbf{a}$ 的梯度定义为

$$\boxed{\mathrm{grad}\,\mathbf{a} = \mathbf{i}\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial z}} \tag{6-1}$$

可见差别仅在于把 φ 换成了 $\mathbf{a}$. 由于 $\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial x}$ 不再是标量而是一个矢量,于是 $\mathbf{i}\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ 由矢量变成了并矢 $\mathbf{i}\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial x}$, grad $\mathbf{a}$ 则成为三个并矢的和,即成为一个并矢. 于是可得结论: grad φ 是一个矢量,而 grad $\mathbf{a}$ 则是一个并矢.

我们可以把 grad $\mathbf{a}$ 写成另一形式:

$$\begin{aligned}
\mathrm{grad}\,\mathbf{a} &= \mathbf{i}\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial z} \\
&= \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{i}a_x + \mathbf{j}a_y + \mathbf{k}a_z) \\
&\quad + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y}(\mathbf{i}a_x + \mathbf{j}a_y + \mathbf{k}a_z) \\
&\quad + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}(\mathbf{i}a_x + \mathbf{j}a_y + \mathbf{k}a_z) \\
&= \mathbf{ii}\frac{\partial a_x}{\partial x} + \mathbf{ij}\frac{\partial a_y}{\partial x} + \mathbf{ik}\frac{\partial a_z}{\partial x} \\
&\quad + \mathbf{ji}\frac{\partial a_x}{\partial y} + \mathbf{jj}\frac{\partial a_y}{\partial y} + \mathbf{jk}\frac{\partial a_z}{\partial y} \\
&\quad + \mathbf{ki}\frac{\partial a_x}{\partial z} + \mathbf{kj}\frac{\partial a_y}{\partial z} + \mathbf{kk}\frac{\partial a_z}{\partial z} \\
&= \left(\mathbf{i}\frac{\partial a_x}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial a_x}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial a_x}{\partial z}\right)\mathbf{i} \\
&\quad + \left(\mathbf{i}\frac{\partial a_y}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial a_y}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\mathbf{j} \\
&\quad + \left(\mathbf{i}\frac{\partial a_z}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial a_z}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial a_z}{\partial z}\right)\mathbf{k} \\
&= (\mathrm{grad}\,a_x)\mathbf{i} + (\mathrm{grad}\,a_y)\mathbf{j} + (\mathrm{grad}\,a_z)\mathbf{k}
\end{aligned}$$

最后得

$$\operatorname{grad}\mathbf{a} = \mathbf{i}\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial z}$$

$$= (\operatorname{grad} a_x)\mathbf{i} + (\operatorname{grad} a_y)\mathbf{j} + (\operatorname{grad} a_z)\mathbf{k} \qquad (6\text{-}2)$$

在矢量分析中，矢量函数 $\mathbf{R}$ 的散度定义为

$$\operatorname{div}\mathbf{R} = \nabla\cdot\mathbf{R} = \frac{\partial R_x}{\partial x} + \frac{\partial R_y}{\partial y} + \frac{\partial R_z}{\partial z}$$

与此相对应，在并矢分析中，并矢 $\overleftrightarrow{\mathbf{A}}$ 的散度定义为

$$\boxed{\operatorname{div}\overleftrightarrow{\mathbf{A}} = \frac{\partial \mathbf{a}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{a}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{a}_z}{\partial z}} \qquad (6\text{-}3)$$

注意，这里的 $\mathbf{a}_x, \mathbf{a}_y, \mathbf{a}_z$ 是 $\overleftrightarrow{\mathbf{A}}$ 表达式中 $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ 右边的矢量，即

$$\overleftrightarrow{\mathbf{A}} = \mathbf{i}\mathbf{a}_x + \mathbf{j}\mathbf{a}_y + \mathbf{k}\mathbf{a}_z$$

可见差别仅在于把 R_x 换成了 $\mathbf{a}_x$，R_y 换成了 $\mathbf{a}_y$，R_z 换成了 $\mathbf{a}_z$。由于 $\frac{\partial \mathbf{a}_x}{\partial x}$ 等是一个矢量而不是标量，故 $\operatorname{div}\overleftrightarrow{\mathbf{A}}$ 变成了矢量。于是可得结论：$\operatorname{div}\mathbf{R}$ 是一个标量，而 $\operatorname{div}\overleftrightarrow{\mathbf{A}}$ 是一个矢量。我们也可以把 $\operatorname{div}\overleftrightarrow{\mathbf{A}}$ 写成另一形式：

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}\overleftrightarrow{\mathbf{A}} &= \frac{\partial \mathbf{a}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{a}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{a}_z}{\partial z} \\
&= \frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{i}a_{xx} + \mathbf{j}a_{xy} + \mathbf{k}a_{xz}) \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial y}(\mathbf{i}a_{yx} + \mathbf{j}a_{yy} + \mathbf{k}a_{yz}) \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial z}(\mathbf{i}a_{zx} + \mathbf{j}a_{zy} + \mathbf{k}a_{zz}) \\
&= \left(\frac{\partial a_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial a_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial a_{zx}}{\partial z}\right)\mathbf{i} \\
&\quad + \left(\frac{\partial a_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial a_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial a_{zy}}{\partial z}\right)\mathbf{j} \\
&\quad + \left(\frac{\partial a_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial a_{yz}}{\partial z} + \frac{\partial a_{zz}}{\partial z}\right)\mathbf{k} \\
&= \operatorname{div}(a_{xx}\mathbf{i} + a_{yx}\mathbf{j} + a_{zx}\mathbf{k})\mathbf{i}
\end{aligned}$$

$$+\operatorname{div}(a_{xy}\mathbf{i}+a_{yy}\mathbf{j}+a_{zy}\mathbf{k})\mathbf{j}$$
$$+\operatorname{div}(a_{xz}\mathbf{i}+a_{yz}\mathbf{j}+a_{zz}\mathbf{k})\mathbf{k}$$
$$=(\operatorname{div}\mathbf{a}'_x)\mathbf{i}+(\operatorname{div}\mathbf{a}'_y)\mathbf{j}+(\operatorname{div}\mathbf{a}'_z)\mathbf{k}$$

式中

$$\mathbf{a}'_x=a_{xx}\mathbf{i}+a_{yx}\mathbf{j}+a_{zx}\mathbf{k}$$
$$\mathbf{a}'_y=a_{xy}\mathbf{i}+a_{yy}\mathbf{j}+a_{zy}\mathbf{k}$$
$$\mathbf{a}'_z=a_{xz}\mathbf{i}+a_{yz}\mathbf{j}+a_{zz}\mathbf{k}$$

最后得

$$\operatorname{div}\overleftrightarrow{\mathbf{A}}=\frac{\partial\mathbf{a}_x}{\partial x}+\frac{\partial\mathbf{a}_y}{\partial y}+\frac{\partial\mathbf{a}_z}{\partial z}$$
$$=(\operatorname{div}\mathbf{a}'_x)\mathbf{i}+(\operatorname{div}\mathbf{a}'_y)\mathbf{j}+(\operatorname{div}\mathbf{a}'_z)\mathbf{k} \qquad (6\text{-}4)$$

我们还可引入转置并矢的散度概念.

由于 $\overleftrightarrow{\mathbf{A}}$ 的转置是

$$\widetilde{\overleftrightarrow{\mathbf{A}}}=\mathbf{i}\mathbf{a}'_x+\mathbf{j}\mathbf{a}'_y+\mathbf{k}\mathbf{a}'_z$$

于是按并矢散度的定义,

$$\operatorname{div}\widetilde{\overleftrightarrow{\mathbf{A}}}=\frac{\partial\mathbf{a}'_x}{\partial x}+\frac{\partial\mathbf{a}'_y}{\partial y}+\frac{\partial\mathbf{a}'_z}{\partial z}$$
$$=(\operatorname{div}\mathbf{a}_x)\mathbf{i}+(\operatorname{div}\mathbf{a}_y)\mathbf{j}+(\operatorname{div}\mathbf{a}_z)\mathbf{k}$$

可见差别仅在于把 $\mathbf{a}_x,\mathbf{a}_y,\mathbf{a}_z$ 相应地换成了 $\mathbf{a}'_x,\mathbf{a}'_y,\mathbf{a}'_z$,反之亦然.

在矢量分析中,矢量函数 $\mathbf{R}$ 的旋度定义为

$$\operatorname{rot}\mathbf{R}=\mathbf{i}\left(\frac{\partial R_z}{\partial y}-\frac{\partial R_y}{\partial z}\right)+\mathbf{j}\left(\frac{\partial R_x}{\partial z}-\frac{\partial R_z}{\partial x}\right)$$
$$+\mathbf{k}\left(\frac{\partial R_y}{\partial x}-\frac{\partial R_x}{\partial y}\right)$$

这是一个矢量. 与此相对应, 在并矢分析中,并矢 $\overleftrightarrow{\mathbf{A}}$ 的旋度定义为

$$\operatorname{rot}\overleftrightarrow{\mathbf{A}}=\mathbf{i}\left(\frac{\partial\mathbf{a}_z}{\partial y}-\frac{\partial\mathbf{a}_y}{\partial z}\right)+\mathbf{j}\left(\frac{\partial\mathbf{a}_x}{\partial z}-\frac{\partial\mathbf{a}_z}{\partial x}\right)$$
$$+\mathbf{k}\left(\frac{\partial\mathbf{a}_y}{\partial x}-\frac{\partial\mathbf{a}_x}{\partial y}\right) \qquad (6\text{-}5)$$

注意，这里 $\mathbf{a}_x,\mathbf{a}_y,\mathbf{a}_z$ 是 $\vec{\vec{\mathbf{A}}}$ 表达式中 $\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}$ 右边的矢量，即

$$\vec{\vec{\mathbf{A}}} = \mathbf{i}\mathbf{a}_x + \mathbf{j}\mathbf{a}_y + \mathbf{k}\mathbf{a}_z$$

可见差别仅在于把 R_x, R_y, R_z 相应地换成了 $\mathbf{a}_x,\mathbf{a}_y,\mathbf{a}_z$. 由于 $\dfrac{\partial \mathbf{a}_z}{\partial z}$ 等是矢量而不是标量，故 rot $\vec{\vec{\mathbf{A}}}$ 变成了并矢。于是可得结论：rot $\mathbf{R}$ 是一个矢量，而 rot $\vec{\vec{\mathbf{A}}}$ 是一个并矢。

用推导 div $\vec{\vec{\mathbf{A}}}$ 另一形式的同样方法，我们可以写出 rot $\vec{\vec{\mathbf{A}}}$ 的另一形式为

$$\text{rot}\,\vec{\vec{\mathbf{A}}} = (\text{rot}\mathbf{a}_x')\mathbf{i} + (\text{rot}\mathbf{a}_y')\mathbf{j} + (\text{rot}\mathbf{a}_z')\mathbf{k} \qquad (6\text{-}6)$$

最后，在并矢分析中，还对并矢 agrad 作了下列定义：

$$\mathbf{a}\text{grad} = \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial z}\mathbf{k} \qquad (6\text{-}7)$$

注意，这是一个并矢而不是一个算符，而在矢量分析中 $\mathbf{a}\cdot\text{grad}$ 定义为

$$a_x\frac{\partial}{\partial x} + a_y\frac{\partial}{\partial y} + a_z\frac{\partial}{\partial z}$$

是一个算符，通常用 $(\mathbf{a}\cdot\nabla)$ 来表示。

我们也可以把 $\mathbf{a}$ grad 写成另一形式：

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}\text{grad} &= \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial z}\mathbf{k} \qquad (6\text{-}8)\\
&= \frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{i}a_x + \mathbf{j}a_y + \mathbf{k}a_z)\mathbf{i}\\
&\quad + \frac{\partial}{\partial y}(\mathbf{i}a_x + \mathbf{j}a_y + \mathbf{k}a_z)\mathbf{j}\\
&\quad + \frac{\partial}{\partial z}(\mathbf{i}a_x + \mathbf{j}a_y + \mathbf{k}a_z)\mathbf{k}\\
&= \mathbf{i}\frac{\partial a_x}{\partial x}\mathbf{i} + \mathbf{j}\frac{\partial a_y}{\partial x}\mathbf{i} + \mathbf{k}\frac{\partial a_z}{\partial x}\mathbf{i}\\
&\quad + \mathbf{i}\frac{\partial a_x}{\partial y}\mathbf{j} + \mathbf{j}\frac{\partial a_y}{\partial y}\mathbf{j} + \mathbf{k}\frac{\partial a_z}{\partial y}\mathbf{j}\\
&\quad + \mathbf{i}\frac{\partial a_x}{\partial z}\mathbf{k} + \mathbf{j}\frac{\partial a_y}{\partial z}\mathbf{k} + \mathbf{k}\frac{\partial a_z}{\partial z}\mathbf{k}
\end{aligned}$$

$$= \mathbf{i}\left(\frac{\partial a_x}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial a_x}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial a_x}{\partial z}\mathbf{k}\right)$$

$$+ \mathbf{j}\left(\frac{\partial a_y}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial a_y}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial a_y}{\partial z}\mathbf{k}\right)$$

$$+ \mathbf{k}\left(\frac{\partial a_z}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial a_z}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial a_z}{\partial z}\mathbf{k}\right)$$

$$= \mathbf{i}\mathrm{grad}a_x + \mathbf{j}\mathrm{grad}a_y + \mathbf{k}\mathrm{grad}a_z$$

6-2 ∇算符的引入及含∇表达式的定义

和矢量分析一样，如果引入∇算符并通过适当的定义，那就可以用含有∇的表达式来表示 grad$\mathbf{a}$, div$\overleftrightarrow{\mathbf{A}}$, rot$\overleftrightarrow{\mathbf{A}}$ 等函数。

具体来说，令

$$\nabla = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

则

$$\nabla\mathbf{a} = \left(\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\mathbf{a}$$

$$= \mathbf{i}\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial z}$$

$$= \mathrm{grad}\mathbf{a}$$

可见

$$\nabla\mathbf{a} = \mathrm{grad}\mathbf{a} \tag{6-9}$$

其次，令 $\overleftrightarrow{\mathbf{A}} = \mathbf{i}\mathbf{a}_x + \mathbf{j}\mathbf{a}_y + \mathbf{k}\mathbf{a}_z$

$$\nabla\cdot\overleftrightarrow{\mathbf{A}} = \left(\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot(\mathbf{i}\mathbf{a}_x + \mathbf{j}\mathbf{a}_y + \mathbf{k}\mathbf{a}_z)$$

$$= \frac{\partial \mathbf{a}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{a}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{a}_z}{\partial z} = \mathrm{div}\,\overleftrightarrow{\mathbf{A}}$$

这里定义点积可按矢量代数公式

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$$

来计算（$\mathbf{a}_x, \mathbf{a}_y, \mathbf{a}_z$ 形式上看成“分量”）。 按定义

$$\nabla \cdot \overleftrightarrow{\mathbf{A}} = \operatorname{div} \overleftrightarrow{\mathbf{A}} \tag{6-10}$$

因为

$$\widetilde{\overleftrightarrow{\mathbf{A}}} = \mathbf{i}\mathbf{a}'_x + \mathbf{j}\mathbf{a}'_y + \mathbf{k}\mathbf{a}'_z$$

所以按同样定义

$$\nabla \cdot \widetilde{\overleftrightarrow{\mathbf{A}}} = \frac{\partial \mathbf{a}'_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{a}'_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{a}'_z}{\partial z}$$

$$= \operatorname{div} \widetilde{\overleftrightarrow{\mathbf{A}}}$$

可见，按定义

$$\nabla \cdot \widetilde{\overleftrightarrow{\mathbf{A}}} = \operatorname{div} \widetilde{\overleftrightarrow{\mathbf{A}}}$$

最后

$$\nabla \times \overleftrightarrow{\mathbf{A}} = \left(\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}\right) \times (\mathbf{i}\mathbf{a}_x + \mathbf{j}\mathbf{a}_y + \mathbf{k}\mathbf{a}_z) \tag{6-11}$$

按矢量代数中叉积的公式，将 $\mathbf{a}_x, \mathbf{a}_y, \mathbf{a}_z$ 形式上看成分量，可得

$$\nabla \times \overleftrightarrow{\mathbf{A}} = \mathbf{i}\left(\frac{\partial \mathbf{a}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathbf{a}_y}{\partial z}\right) + \mathbf{j}\left(\frac{\partial \mathbf{a}_x}{\partial z} - \frac{\partial \mathbf{a}_z}{\partial x}\right) + \mathbf{k}\left(\frac{\partial \mathbf{a}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathbf{a}_x}{\partial y}\right) \tag{6-12}$$

可见，按定义

$$\nabla \times \overleftrightarrow{\mathbf{A}} = \operatorname{rot} \overleftrightarrow{\mathbf{A}}$$

实质上我们定义了

$$\nabla \mathbf{a} = \operatorname{grad} \mathbf{a}, \quad \nabla \cdot \overleftrightarrow{\mathbf{A}} = \operatorname{div} \overleftrightarrow{\mathbf{A}}, \quad \nabla \times \overleftrightarrow{\mathbf{A}} = \operatorname{rot} \overleftrightarrow{\mathbf{A}}$$

以上过程只不过说明为什么散度用点积、旋度用叉积的形式而已。至于第二定义方式，结果也完全一样。

6-3 $T(\nabla)$ 的定义

现在来对矢量分析中 $T(\nabla)$ 的第二定义加以推广。在这一节中，我们先给出一个含有 ∇ 及对 ∇ 进行矢量代数和并矢代数运算的表达式（即把 ∇ 看成普通矢量那样进行运算的表达式）的定义。

然后证明所有矢量分析和并矢分析中可能出现的场函数或微分运算，如梯度、散度、旋度等都可以通过一定形式的 $T(\nabla)$ 来表示。在下一节中将证明对 $T(\nabla)$ 进行运算的规则。

定义 对任何一个含有 ∇ 和其他函数的，并对 ∇ 为线性的表达式 $T(\nabla)$（$T(\nabla)$ 中包含矢量代数运算和并矢代数运算的形式）定义如下：

(1) 首先，

$$T(\nabla)=\frac{\partial}{\partial x}T(\mathbf{i})+\frac{\partial}{\partial y}T(\mathbf{j})+\frac{\partial}{\partial z}T(\mathbf{k}) \qquad (6\text{-}13)$$

式中，$T(\mathbf{i}),T(\mathbf{j}),T(\mathbf{k})$ 为在 $T(\nabla)$ 中将 ∇ 分别换成 $\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}$ 的结果；$\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}$ 为直角坐标系中沿 x, y, z 轴正方向的三个单位矢量。

(2) 在 $T(\nabla)$ 中，如果某些函数在微分时需视为常数，那么要对这些函数加上微分时视为常数的下角注 c，否则不论函数位于 ∇ 前面或后面，都要对它们进行微分。

下面证明用某些具体的 $T(\nabla)$ 可以表示矢量微积和并矢微积中常用的所有场函数或微分运算。

按照 $T(\nabla)$ 的定义并参看第四章结果，立即可以推导出：

(1) $\nabla\varphi=\varphi\nabla=\mathrm{grad}\varphi=\nabla\varphi$ (6-14)

(2) $\nabla\cdot\mathbf{R}=\mathbf{R}\cdot\nabla=\mathrm{div}\mathbf{R}=\nabla\cdot\mathbf{R}$ (6-15)

(3) $\nabla\times\mathbf{R}=-\mathbf{R}\times\nabla=\mathrm{rot}\mathbf{R}=\nabla\times\mathbf{R}$ (6-16)

(4) $(\mathbf{a}_c\cdot\nabla)\mathbf{R}=\mathbf{R}(\mathbf{a}_c\cdot\nabla)=(\mathbf{a}\cdot\nabla)\mathbf{R}$ (6-17)

(5)
$$\begin{aligned}\nabla\mathbf{a}&=\frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{ia})+\frac{\partial}{\partial y}(\mathbf{ja})+\frac{\partial}{\partial z}(\mathbf{ka})\\&=\mathbf{i}\frac{\partial\mathbf{a}}{\partial x}+\mathbf{j}\frac{\partial\mathbf{a}}{\partial y}+\mathbf{k}\frac{\partial\mathbf{a}}{\partial z}\\&=\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x}(a_x\mathbf{i}+a_y\mathbf{j}+a_z\mathbf{k})\\&\quad+\mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y}(a_x\mathbf{i}+a_y\mathbf{j}+a_z\mathbf{k})\\&\quad+\mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}(a_x\mathbf{i}+a_y\mathbf{j}+a_z\mathbf{k})\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\partial a_x}{\partial x}\mathbf{ii} + \frac{\partial a_y}{\partial x}\mathbf{ij} + \frac{\partial a_z}{\partial x}\mathbf{ik} \\
&\quad + \frac{\partial a_x}{\partial y}\mathbf{ji} + \frac{\partial a_y}{\partial y}\mathbf{jj} + \frac{\partial a_z}{\partial y}\mathbf{jk} \\
&\quad + \frac{\partial a_x}{\partial z}\mathbf{ki} + \frac{\partial a_y}{\partial z}\mathbf{kj} + \frac{\partial a_z}{\partial z}\mathbf{kk} \\
&= \left(\frac{\partial a_x}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial a_x}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial a_x}{\partial z}\mathbf{k}\right)\mathbf{i} \\
&\quad + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial a_y}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial a_y}{\partial z}\mathbf{k}\right)\mathbf{j} \\
&\quad + \left(\frac{\partial a_z}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial a_z}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial a_z}{\partial z}\mathbf{k}\right)\mathbf{k} \\
&= (\mathrm{grad}\, a_x)\mathbf{i} + (\mathrm{grad}\, a_y)\mathbf{j} + (\mathrm{grad}\, a_z)\mathbf{k} \\
&= \mathrm{grad}\,\mathbf{a}
\end{aligned}
$$

由此可见

$$
\boxed{\nabla\mathbf{a} = \mathrm{grad}\,\mathbf{a} = \nabla\mathbf{a}} \tag{6-18}
$$

(6)

$$
\begin{aligned}
\nabla\cdot\overleftrightarrow{\mathbf{A}} &= \frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{i}\cdot\overleftrightarrow{\mathbf{A}}) + \frac{\partial}{\partial y}(\mathbf{j}\cdot\overleftrightarrow{\mathbf{A}}) + \frac{\partial}{\partial z}(\mathbf{k}\cdot\overleftrightarrow{\mathbf{A}}) \\
&= \frac{\partial}{\partial x}\left[\mathbf{i}\cdot(\mathbf{a}'_x\mathbf{i} + \mathbf{a}'_y\mathbf{j} + \mathbf{a}'_z\mathbf{k})\right] \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial y}\left[\mathbf{j}\cdot(\mathbf{a}'_x\mathbf{i} + \mathbf{a}'_y\mathbf{j} + \mathbf{a}'_z\mathbf{k})\right] \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial z}\left[\mathbf{k}\cdot(\mathbf{a}'_x\mathbf{i} + \mathbf{a}'_y\mathbf{j} + \mathbf{a}'_z\mathbf{k})\right] \\
&= \frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{i}\cdot\mathbf{a}'_x)\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{i}\cdot\mathbf{a}'_y)\mathbf{j} \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{i}\cdot\mathbf{a}'_z)\mathbf{k} + \frac{\partial}{\partial y}(\mathbf{j}\cdot\mathbf{a}'_x)\mathbf{i} \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial y}(\mathbf{j}\cdot\mathbf{a}'_y)\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial y}(\mathbf{j}\cdot\mathbf{a}'_z)\mathbf{k}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{\partial}{\partial z}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{a}_x')\mathbf{i}+\frac{\partial}{\partial z}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{a}_y')\mathbf{j} \\
&+\frac{\partial}{\partial z}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{a}_z')\mathbf{k} \\
=&\left[\frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{i}\cdot\mathbf{a}_x')+\frac{\partial}{\partial y}(\mathbf{j}\cdot\mathbf{a}_x')+\frac{\partial}{\partial z}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{a}_x')\right]\mathbf{i} \\
&+\left[\frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{i}\cdot\mathbf{a}_y')+\frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{j}\cdot\mathbf{a}_y')\right. \\
&\left.+\frac{\partial}{\partial z}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{a}_y')\right]\mathbf{j}+\left[\frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{i}\cdot\mathbf{a}_z')\right. \\
&\left.+\frac{\partial}{\partial y}(\mathbf{j}\cdot\mathbf{a}_z')+\frac{\partial}{\partial z}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{a}_z')\right]\mathbf{k} \\
=&(\mathrm{div}\mathbf{a}_x')\mathbf{i}+(\mathrm{div}\mathbf{a}_y')\mathbf{j}+(\mathrm{div}\mathbf{a}_z')\mathbf{k} \\
=&\mathrm{div}\overleftrightarrow{\mathbf{A}}
\end{aligned}
$$

另一方面，

$$\triangledown\cdot\overleftrightarrow{\mathbf{A}}=\frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{i}\cdot\overleftrightarrow{\mathbf{A}})+\frac{\partial}{\partial y}(\mathbf{j}\cdot\overleftrightarrow{\mathbf{A}})+\frac{\partial}{\partial z}(\mathbf{k}\cdot\overleftrightarrow{\mathbf{A}})$$

因为

$$\overleftrightarrow{\mathbf{A}}=\mathbf{i}\mathbf{a}_x+\mathbf{j}\mathbf{a}_y+\mathbf{k}\mathbf{a}_z$$

所以

$$
\begin{aligned}
\mathbf{i}\cdot\overleftrightarrow{\mathbf{A}}&=\mathbf{i}\cdot(\mathbf{i}\mathbf{a}_x+\mathbf{j}\mathbf{a}_y+\mathbf{k}\mathbf{a}_z) \\
&=(\mathbf{i}\cdot\mathbf{i})\mathbf{a}_x+(\mathbf{i}\cdot\mathbf{j})\mathbf{a}_y+(\mathbf{i}\cdot\mathbf{k})\mathbf{a}_z \\
&=\mathbf{a}_x
\end{aligned}
$$

$$(\mathbf{i}\cdot\mathbf{i}=1,\ \mathbf{i}\cdot\mathbf{j}=0,\ \mathbf{i}\cdot\mathbf{k}=0)$$

同理

$$\mathbf{j}\cdot\overleftrightarrow{\mathbf{A}}=\mathbf{a}_y,\quad \mathbf{k}\cdot\overleftrightarrow{\mathbf{A}}=\mathbf{a}_z$$

代入$\triangledown\cdot\overleftrightarrow{\mathbf{A}}$ 的表达式中，得

$$\triangledown\cdot\overleftrightarrow{\mathbf{A}}=\frac{\partial\mathbf{a}_x}{\partial x}+\frac{\partial\mathbf{a}_y}{\partial y}+\frac{\partial\mathbf{a}_z}{\partial z}=\mathrm{div}\,\overleftrightarrow{\mathbf{A}}$$

由此可见，

$$\boxed{\triangledown\cdot\overleftrightarrow{\mathbf{A}}=\mathrm{div}\overleftrightarrow{\mathbf{A}}=\nabla\cdot\overleftrightarrow{\mathbf{A}}}\tag{6-19}$$

$$
\begin{aligned}
(7)\ \nabla \times \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{A}} &= \frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{i} \times \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{A}}) + \frac{\partial}{\partial y}(\mathbf{j} \times \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{A}}) \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial z}(\mathbf{k} \times \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{A}}) \\
&= \frac{\partial}{\partial x}[\mathbf{i} \times (\mathbf{a}'_x\mathbf{i} + \mathbf{a}'_y\mathbf{j} + \mathbf{a}'_z\mathbf{k})] \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial y}[\mathbf{j} \times (\mathbf{a}'_x\mathbf{i} + \mathbf{a}'_y\mathbf{j} + \mathbf{a}'_z\mathbf{k})] \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial z}[\mathbf{k} \times \mathbf{a}'_x\mathbf{i} + \mathbf{a}'_y\mathbf{j} + \mathbf{a}'_z\mathbf{k})] \\
&= \frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{i} \times \mathbf{a}'_x)\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{i} \times \mathbf{a}'_y)\mathbf{j} \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{i} \times \mathbf{a}'_z)\mathbf{k} + \frac{\partial}{\partial y}(\mathbf{j} \times \mathbf{a}'_x)\mathbf{i} \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial y}(\mathbf{j} \times \mathbf{a}'_y)\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial y}(\mathbf{j} \times \mathbf{a}'_z)\mathbf{k} \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial z}(\mathbf{k} \times \mathbf{a}'_x)\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial z}(\mathbf{k} \times \mathbf{a}'_y)\mathbf{j} \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial z}(\mathbf{k} \times \mathbf{a}'_z)\mathbf{k} \\
&= \left[\frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{i} \times \mathbf{a}'_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\mathbf{j} \times \mathbf{a}'_x)\right. \\
&\quad \left. + \frac{\partial}{\partial z}(\mathbf{k} \times \mathbf{a}'_x)\right]\mathbf{i} \\
&\quad + \left[\frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{i} \times \mathbf{a}'_y) + \frac{\partial}{\partial y}(\mathbf{j} \times \mathbf{a}'_y)\right. \\
&\quad \left. + \frac{\partial}{\partial z}(\mathbf{k} \times \mathbf{a}'_y)\right]\mathbf{j} \\
&\quad + \left[\frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{i} \times \mathbf{a}'_z) + \frac{\partial}{\partial y}(\mathbf{j} \times \mathbf{a}'_z)\right. \\
&\quad \left. + \frac{\partial}{\partial z}(\mathbf{k} \times \mathbf{a}'_z)\right]\mathbf{k} \\
&= (\mathrm{rot}\,\mathbf{a}'_x)\mathbf{i} + (\mathrm{rot}\,\mathbf{a}'_y)\mathbf{j} + (\mathrm{rot}\,\mathbf{a}'_z)\mathbf{k} = \mathrm{rot}\,\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{A}}
\end{aligned}
$$

另一方面，

$$\overleftrightarrow{\mathbf{A}} = \mathbf{i}\mathbf{a}_x + \mathbf{j}\mathbf{a}_y + \mathbf{k}\mathbf{a}_z$$

$$\mathbf{i} \times \overleftrightarrow{\mathbf{A}} = \mathbf{i} \times (\mathbf{i}\mathbf{a}_x + \mathbf{j}\mathbf{a}_y + \mathbf{k}\mathbf{a}_z) = \mathbf{k}\mathbf{a}_y - \mathbf{j}\mathbf{a}_z$$

$$\mathbf{j} \times \overleftrightarrow{\mathbf{A}} = \mathbf{j} \times (\mathbf{i}\mathbf{a}_x + \mathbf{j}\mathbf{a}_y + \mathbf{k}\mathbf{a}_z) = -\mathbf{k}\mathbf{a}_x + \mathbf{i}\mathbf{a}_z$$

$$\mathbf{k} \times \overleftrightarrow{\mathbf{A}} = \mathbf{k} \times (\mathbf{i}\mathbf{a}_x + \mathbf{j}\mathbf{a}_y + \mathbf{k}\mathbf{a}_z) = \mathbf{j}\mathbf{a}_x - \mathbf{i}\mathbf{a}_y$$

故

$$\begin{aligned}\nabla \times \overleftrightarrow{\mathbf{A}} &= \frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{k}\mathbf{a}_y - \mathbf{j}\mathbf{a}_z) + \frac{\partial}{\partial y}(-\mathbf{k}\mathbf{a}_x + \mathbf{i}\mathbf{a}_z) \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial z}(\mathbf{j}\mathbf{a}_x - \mathbf{i}\mathbf{a}_y) \\ &= \mathbf{i}\left(\frac{\partial \mathbf{a}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathbf{a}_y}{\partial z}\right) + \mathbf{j}\left(\frac{\partial \mathbf{a}_x}{\partial z} - \frac{\partial \mathbf{a}_z}{\partial x}\right) \\ &\quad + \mathbf{k}\left(\frac{\partial \mathbf{a}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathbf{a}_x}{\partial y}\right) = \mathrm{rot}\,\overleftrightarrow{\mathbf{A}}\end{aligned}$$

由此可见

$$\boxed{\nabla \times \overleftrightarrow{\mathbf{A}} = \mathrm{rot}\overleftrightarrow{\mathbf{A}} = \nabla \times \overleftrightarrow{\mathbf{A}}} \qquad (6\text{-}20)$$

(8) $$\begin{aligned}\mathbf{a}\nabla &= \frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{a}\mathbf{i}) + \frac{\partial}{\partial y}(\mathbf{a}\mathbf{j}) + \frac{\partial}{\partial z}(\mathbf{a}\mathbf{k}) \\ &= \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial y}\mathbf{k} = \mathbf{a}\,\mathrm{grad}\end{aligned}$$

由此可见

$$\boxed{\mathbf{a}\nabla = \mathbf{a}\mathrm{grad}} \qquad (6\text{-}21)$$

(9) $$\begin{aligned}\overleftrightarrow{\mathbf{A}} \cdot \nabla &= \frac{\partial}{\partial x}(\overleftrightarrow{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{i}) + \frac{\partial}{\partial y}(\overleftrightarrow{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{j}) + \frac{\partial}{\partial z}(\overleftrightarrow{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{k}) \\ &= \frac{\partial}{\partial x}[(\mathbf{i}\mathbf{a}_x + \mathbf{j}\mathbf{a}_y + \mathbf{k}\mathbf{a}_z) \cdot \mathbf{i}] \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial y}[(\mathbf{i}\mathbf{a}_x + \mathbf{j}\mathbf{a}_y + \mathbf{k}\mathbf{a}_z) \cdot \mathbf{j}] \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial z}[(\mathbf{i}\mathbf{a}_x + \mathbf{j}\mathbf{a}_y + \mathbf{k}\mathbf{a}_z) \cdot \mathbf{k}]\end{aligned}$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left[\mathbf{i}(\mathbf{a}_x\cdot\mathbf{i}) + \mathbf{j}(\mathbf{a}_y\cdot\mathbf{i}) + \mathbf{k}(\mathbf{a}_z\cdot\mathbf{i})\right]$$

$$+ \frac{\partial}{\partial y}\left[\mathbf{i}(\mathbf{a}_x\cdot\mathbf{j}) + \mathbf{j}(\mathbf{a}_y\cdot\mathbf{j}) + \mathbf{k}(\mathbf{a}_z\cdot\mathbf{j})\right]$$

$$+ \frac{\partial}{\partial z}\left[\mathbf{i}(\mathbf{a}_x\cdot\mathbf{k}) + \mathbf{j}(\mathbf{a}_y\cdot\mathbf{k}) + \mathbf{k}(\mathbf{a}_z\cdot\mathbf{k})\right]$$

$$= \mathbf{i}\left[\frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{a}_x\cdot\mathbf{i}) + \frac{\partial}{\partial y}(\mathbf{a}_x\cdot\mathbf{j}) + \frac{\partial}{\partial z}(\mathbf{a}_x\cdot\mathbf{k})\right]$$

$$+ \mathbf{j}\left[\frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{a}_y\cdot\mathbf{i}) + \frac{\partial}{\partial y}(\mathbf{a}_y\cdot\mathbf{j}) + \frac{\partial}{\partial z}(\mathbf{a}_y\cdot\mathbf{k})\right]$$

$$+ \mathbf{k}\left[\frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{a}_z\cdot\mathbf{i}) + \frac{\partial}{\partial y}(\mathbf{a}_z\cdot\mathbf{j}) + \frac{\partial}{\partial z}(\mathbf{a}_z\cdot\mathbf{k})\right]$$

$$= \mathbf{i}\,\mathrm{div}\,\mathbf{a}_x + \mathbf{j}\,\mathrm{div}\,\mathbf{a}_y + \mathbf{k}\,\mathrm{div}\,\mathbf{a}_z = \mathrm{div}\,\widetilde{\overleftrightarrow{\mathbf{A}}}$$

由此可见，

$$\boxed{\overleftrightarrow{\mathbf{A}}\cdot\triangledown = \mathrm{div}\,\widetilde{\overleftrightarrow{\mathbf{A}}}} \tag{6-22}$$

由以上推导可以看出，所有矢量微积和并矢微积中常用的场函数和微分运算都可以用一种适当的 $T(\triangledown)$ 表示，这里，

$$T(\triangledown) = \frac{\partial}{\partial x}T(\mathbf{i}) + \frac{\partial}{\partial y}T(\mathbf{j}) + \frac{\partial}{\partial z}T(\mathbf{k})$$

并且

$$\triangledown\varphi = \mathrm{grad}\varphi = \nabla\varphi$$

$$\triangledown\cdot\mathbf{R} = \mathrm{div}\mathbf{R} = \nabla\cdot\mathbf{R}$$

$$\triangledown\times\mathbf{R} = \mathrm{rot}\mathbf{R} = \nabla\times\mathbf{R}$$

$$(\mathbf{a}\cdot\triangledown)\mathbf{b} = (\mathbf{a}\cdot\nabla)\mathbf{b}$$

$$\triangledown\mathbf{a} = \mathrm{grad}\mathbf{a} = \nabla\mathbf{a}$$

$$\triangledown\cdot\overleftrightarrow{\mathbf{A}} = \mathrm{div}\,\overleftrightarrow{\mathbf{A}} = \nabla\cdot\overleftrightarrow{\mathbf{A}}$$

$$\overleftrightarrow{\mathbf{A}}\cdot\triangledown = \mathrm{div}\,\widetilde{\overleftrightarrow{\mathbf{A}}}$$

$$\triangledown\times\overleftrightarrow{\mathbf{A}} = \mathrm{rot}\overleftrightarrow{\mathbf{A}} = \nabla\times\overleftrightarrow{\mathbf{A}}$$

$$\mathbf{a}\triangledown = \mathbf{a}\,\mathrm{grad}$$

6-4　$T(\nabla)$ 的性质

在这一节中我们要证明 $T(\nabla)$ 的三条性质．它们是对 $T(\nabla)$ 进行运算的理论依据．

(1) 对 $T(\nabla)$ 可将∇看成普通矢量进行矢量代数和并矢代数运算，所得结果不变．

证：对任何 $T_1(\nabla)$，可将∇看成普通矢量进行恒等变换而得到 $T_2(\nabla)$，这意味着

$$T_1(\mathbf{i}) = T_2(\mathbf{i}),\ T_1(\mathbf{j}) = T_2(\mathbf{j}),\ T_1(\mathbf{k}) = T_2(\mathbf{k})$$

因此

$$\frac{\partial}{\partial x} T_1(\mathbf{i}) = \frac{\partial}{\partial x} T_2(\mathbf{i}) \quad \frac{\partial}{\partial y} T_1(\mathbf{j}) = \frac{\partial}{\partial y} T_2(\mathbf{j})$$

$$\frac{\partial}{\partial z} T_1(\mathbf{k}) = \frac{\partial}{\partial z} T_2(\mathbf{k})$$

于是

$$\begin{aligned} T_1(\nabla) &= \frac{\partial}{\partial x} T_1(\mathbf{i}) + \frac{\partial}{\partial y} T_1(\mathbf{j}) + \frac{\partial}{\partial z} T_1(\mathbf{k}) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} T_2(\mathbf{i}) + \frac{\partial}{\partial y} T_2(\mathbf{j}) + \frac{\partial}{\partial z} T_2(\mathbf{k}) \\ &= T_2(\nabla) \end{aligned}$$

这一性质表明，对 $T(\nabla)$ 作矢量代数和并矢代数恒等运算不会影响其性质．

下面举一个例子来说明．

$$\mathbf{a}_c \cdot (\nabla \mathbf{b}) = (\mathbf{a}_c \cdot \nabla)\mathbf{b} = (\mathbf{a} \cdot \nabla)\mathbf{b}$$

可见，矢量分析中矢量 $\mathbf{b}$ 在方向 $\mathbf{a}$ 上的导数乘以 $\mathbf{a}$ 的幅值等于 $\mathbf{a}$ 与 grad $\mathbf{b}$ 的点积．这里我们看到，在引入了并矢和矢量的梯度概念之后，方向导数只不过是两个场函数(一个矢量和一个并矢)的点积，没有任何特殊的地方．

(2) 如果表达式 $T(\nabla)$ 中在∇前边或后边有两个函数的乘

积或并矢，那么 $T(\nabla)$ 可表示为两项之和；在一项中，一个函数或并矢内的一个矢量视为常数，不受微分影响；而在另一项中，另一函数或并矢内的另一矢量视为常数，不受微分影响。

证：证明方法和第四章中的完全一样。现以 $\nabla\cdot(\mathbf{ab})$ 为例来证明：

$$\begin{aligned}
\nabla\cdot(\mathbf{ab}) &= \frac{\partial}{\partial x}[\mathbf{i}\cdot(\mathbf{ab})]+\frac{\partial}{\partial y}[\mathbf{j}\cdot(\mathbf{ab})] \\
&\quad +\frac{\partial}{\partial z}[\mathbf{k}\cdot(\mathbf{ab})] \\
&= \frac{\partial}{\partial x}[\mathbf{i}\cdot(\mathbf{a}_c\mathbf{b})]+\frac{\partial}{\partial y}[\mathbf{j}\cdot(\mathbf{a}_c\mathbf{b})] \\
&\quad +\frac{\partial}{\partial z}[\mathbf{k}\cdot(\mathbf{a}_c\mathbf{b})]+\frac{\partial}{\partial x}[\mathbf{i}\cdot(\mathbf{ab}_c)] \\
&\quad +\frac{\partial}{\partial y}[\mathbf{j}\cdot(\mathbf{ab}_c)]+\frac{\partial}{\partial z}[\mathbf{k}\cdot(\mathbf{ab}_c)] \\
&= \nabla\cdot(\mathbf{a}_c\mathbf{b})+\nabla\cdot(\mathbf{ab}_c)\ \text{（此即所需证明结果）} \\
&= (\nabla\cdot\mathbf{a}_c)\mathbf{b}+(\nabla\cdot\mathbf{a})\mathbf{b}_c\ \text{（以下为运算）} \\
&= (\mathbf{a}_c\cdot\nabla)\mathbf{b}+\mathbf{b}_c(\nabla\cdot\mathbf{a}) \\
&= (\mathbf{a}\cdot\nabla)\mathbf{b}+\mathbf{b}\,\mathrm{div}\,\mathbf{a}
\end{aligned}$$

同理可证

$$\nabla\times(\mathbf{ab})=\nabla\times(\mathbf{a}_c\mathbf{b})+\nabla\times(\mathbf{ab}_c)$$

(3) 若某一 $T(\nabla)$ 可表述为另一 $T_1(\nabla)$ 与一个以乘积号（数乘、点乘或叉乘）连结的微分时被视为常数的函数之乘积，则 $T(\nabla)$ 就等于这个视为常数的函数与由 $T_1(\nabla)$ 所决定的函数之乘积。

证明过程和 4-16 节中定理 3 的证明完全一样，这里就不重复了。

6-5 运 算 举 例

在这一节中，我们应用 $T(\nabla)$ 运算规则（性质 1,2,3）来进行

各种具体的运算，以熟悉 $T(\nabla)$ 的运算方法并从中推导出或证明一系列并矢分析中有用的恒等式。

例 1 试证 $\mathrm{grad}(\mathbf{a}\times\mathbf{b})=(\mathrm{grad}\mathbf{a})\times\mathbf{b}-(\mathrm{grad}\mathbf{b})\times\mathbf{a}$。

证:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{grad}(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) &= \nabla(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\\
&= \nabla(\mathbf{a}\times\mathbf{b}_c)+\nabla(\mathbf{a}_c\times\mathbf{b})\\
&= (\nabla\mathbf{a})\times\mathbf{b}_c-(\nabla\mathbf{b})\times\mathbf{a}_c\\
&= \mathrm{grad}\mathbf{a}\times\mathbf{b}-\mathrm{grad}\mathbf{b}\times\mathbf{a}
\end{aligned}
$$

例 2 试证 $\mathrm{grad}(\varphi\mathbf{b})=(\mathrm{grad}\varphi)\mathbf{b}+\varphi\mathrm{grad}\mathbf{b}$。

证:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{grad}(\varphi\mathbf{b}) &= \nabla(\varphi\mathbf{b})\\
&= \nabla(\varphi\mathbf{b}_c)+\nabla(\varphi_c\mathbf{b})\\
&= (\nabla\varphi)\mathbf{b}_c+\varphi_c\nabla\mathbf{b}\\
&= (\mathrm{grad}\varphi)\mathbf{b}+\varphi\mathrm{grad}\mathbf{b}
\end{aligned}
$$

例 3 试证 $(\mathbf{a}\cdot\mathrm{grad})\overleftrightarrow{\mathbf{A}}=a_x\dfrac{\partial\overleftrightarrow{\mathbf{A}}}{\partial x}+a_y\dfrac{\partial\overleftrightarrow{\mathbf{A}}}{\partial y}+a_z\dfrac{\partial\overleftrightarrow{\mathbf{A}}}{\partial z}$。

证:

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{a}\cdot\mathrm{grad})\overleftrightarrow{\mathbf{A}} &= (\mathbf{a}_c\cdot\nabla)\overleftrightarrow{\mathbf{A}}\\
&= \frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{a}_c\cdot\mathbf{i})\overleftrightarrow{\mathbf{A}}+\frac{\partial}{\partial y}(\mathbf{a}_c\cdot\mathbf{j})\overleftrightarrow{\mathbf{A}}\\
&\quad+\frac{\partial}{\partial z}(\mathbf{a}_c\cdot\mathbf{k})\overleftrightarrow{\mathbf{A}}\\
&= a_x\frac{\partial\overleftrightarrow{\mathbf{A}}}{\partial x}+a_y\frac{\partial\overleftrightarrow{\mathbf{A}}}{\partial y}+a_z\frac{\partial\overleftrightarrow{\mathbf{A}}}{\partial z}
\end{aligned}
$$

例 4 试证 $d\mathbf{r}\cdot\mathrm{grad}\mathbf{a}=d\mathbf{a}$。

证:

$$
\begin{aligned}
d\mathbf{r}\cdot\mathrm{grad}\mathbf{a} &= (d\mathbf{r})_c\cdot(\nabla\mathbf{a})\\
&= \frac{\partial}{\partial x}(d\mathbf{r}_c\cdot\mathbf{i})\mathbf{a}+\frac{\partial}{\partial y}(d\mathbf{r}_c\cdot\mathbf{j})\mathbf{a}\\
&\quad+\frac{\partial}{\partial z}(d\mathbf{r}_c\cdot\mathbf{k})\mathbf{a}
\end{aligned}
$$

$$= dr_x \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial x} + dr_y \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial y} + dr_z \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial z}$$

$$= \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial x} dx + \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial y} dy + \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial z} dz$$

$$= d\mathbf{a}$$

例 5 试证 $\mathrm{div}(\mathbf{ab}) = (\mathrm{div}\mathbf{a})\mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathrm{grad}\mathbf{b}$。

证：

$$\begin{aligned}\mathrm{div}(\mathbf{ab}) &= \nabla \cdot (\mathbf{ab}) \\ &= \nabla \cdot (\mathbf{ab}_c) + \nabla \cdot (\mathbf{a}_c\mathbf{b}) \\ &= (\nabla \cdot \mathbf{a})\mathbf{b}_c + (\nabla \cdot \mathbf{a}_c)\mathbf{b} \\ &= \mathbf{b}_c(\nabla \cdot \mathbf{a}) + (\mathbf{a}_c \cdot \nabla)\mathbf{b} \\ &= \mathbf{b}\mathrm{div}\mathbf{a} + \mathbf{a}_c \cdot (\nabla\mathbf{b}) \\ &= (\mathrm{div}\mathbf{a})\mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathrm{grad}\mathbf{b}\end{aligned}$$

例 6 试证 $\mathrm{div}(\varphi\overleftrightarrow{\mathbf{A}}) = \mathrm{grad}\varphi \cdot \overleftrightarrow{\mathbf{A}} + \varphi\mathrm{div}\overleftrightarrow{\mathbf{A}}$。

证：

$$\begin{aligned}\mathrm{div}(\varphi\overleftrightarrow{\mathbf{A}}) &= \nabla \cdot (\varphi\overleftrightarrow{\mathbf{A}}) \\ &= \nabla \cdot (\varphi\overleftrightarrow{\mathbf{A}}_c) + \nabla \cdot (\varphi_c\overleftrightarrow{\mathbf{A}}) \\ &= \nabla\varphi \cdot \overleftrightarrow{\mathbf{A}}_c + \varphi_c\nabla\overleftrightarrow{\mathbf{A}} \\ &= \mathrm{grad}\varphi \cdot \overleftrightarrow{\mathbf{A}} + \varphi\mathrm{div}\overleftrightarrow{\mathbf{A}}\end{aligned}$$

例 7 试证：$\mathrm{div}(\mathbf{a} \times \overleftrightarrow{\mathbf{A}}) = (\mathrm{rot}\mathbf{a}) \cdot \overleftrightarrow{\mathbf{A}} - \mathbf{a} \cdot \mathrm{rot}\overleftrightarrow{\mathbf{A}}$。

证：

$$\begin{aligned}\mathrm{div}(\mathbf{a} \times \overleftrightarrow{\mathbf{A}}) &= \nabla \cdot (\mathbf{a} \times \overleftrightarrow{\mathbf{A}}) \\ &= \nabla \cdot (\mathbf{a} \times \overleftrightarrow{\mathbf{A}}_c) + \nabla \cdot (\mathbf{a}_c \times \overleftrightarrow{\mathbf{A}}) \\ &= [\nabla \times \mathbf{a}] \cdot \overleftrightarrow{\mathbf{A}}_c - \mathbf{a}_c \cdot [\nabla \times \overleftrightarrow{\mathbf{A}}] \\ &= (\mathrm{rot}\mathbf{a}) \cdot \overleftrightarrow{\mathbf{A}} - \mathbf{a} \cdot \mathrm{rot}\overleftrightarrow{\mathbf{A}}\end{aligned}$$

例 8 试证 $\mathrm{div}(\mathbf{ab} - \mathbf{ba}) = -\mathrm{rot}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathrm{rot}(\mathbf{b} \times \mathbf{a})$。

证：

$$\begin{aligned}\mathrm{rot}(\mathbf{b} \times \mathbf{a}) &= -\mathrm{rot}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \\ &= -\nabla \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \\ &= -\nabla \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}_c) - \nabla \times (\mathbf{a}_c \times \mathbf{b})\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -(\nabla\cdot\mathbf{b}_c)\mathbf{a}+(\nabla\cdot\mathbf{a})\mathbf{b}_c \\
&\quad -(\nabla\cdot\mathbf{b})\mathbf{a}_c+(\nabla\cdot\mathbf{a}_c)\mathbf{b} \\
&= -(\nabla\cdot\mathbf{b})\mathbf{a}+(\nabla\cdot\mathbf{a})\mathbf{b} \\
&= -\nabla\cdot(\mathbf{ba})+\nabla\cdot(\mathbf{ab}) \\
&= \nabla\cdot(\mathbf{ab}-\mathbf{ba}) \\
&= \mathrm{div}(\mathbf{ab}-\mathbf{ba})
\end{aligned}
$$

例 9 试证 $\mathrm{div}(\varphi\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{I}})=\mathrm{grad}\varphi$。式中，$\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{I}}$ 为恒等并矢。

证：

$$
\begin{aligned}
\mathrm{div}(\varphi\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{I}}) &= \nabla\cdot(\varphi\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{I}}) \\
&= (\nabla\varphi)\cdot\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{I}} \\
&= \nabla\varphi=\mathrm{grad}\varphi
\end{aligned}
$$

例 10 试证 $\mathrm{div}(\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{I}}\times\mathbf{a})=\mathrm{rot}\mathbf{a}$。式中，$\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{I}}$ 为恒等并矢。

证：

$$
\begin{aligned}
\mathrm{div}(\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{I}}\times\mathbf{a}) &= \nabla\cdot(\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{I}}\times\mathbf{a}) \\
&= (\nabla\cdot\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{I}})\times\mathbf{a} \\
&= \nabla\times\mathbf{a}=\mathrm{rot}\mathbf{a}
\end{aligned}
$$

例 11 试证 $\mathrm{rot}(\mathbf{ab})=(\mathrm{rot}\mathbf{a})\mathbf{b}-\mathbf{a}\times\mathrm{grad}\mathbf{b}$。

证：

$$
\begin{aligned}
\mathrm{rot}(\mathbf{ab}) &= \nabla\times(\mathbf{ab}) \\
&= \nabla\times(\mathbf{ab}_c)+\nabla\times(\mathbf{a}_c\mathbf{b}) \\
&= (\nabla\times\mathbf{a})\mathbf{b}_c+(\nabla\times\mathbf{a}_c)\mathbf{b} \\
&= (\mathrm{rot}\mathbf{a})\mathbf{b}-\mathbf{a}_c\times(\nabla\mathbf{b}) \\
&= (\mathrm{rot}\mathbf{a})\mathbf{b}-\mathbf{a}\times\mathrm{grad}\mathbf{b}
\end{aligned}
$$

例 12 试证 $\mathrm{rot}(\varphi\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{A}})=\mathrm{grad}\varphi\times\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{A}}+\varphi\mathrm{rot}\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{A}}$。

证：

$$
\begin{aligned}
\mathrm{rot}(\varphi\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{A}}) &= \nabla\times(\varphi\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{A}}) \\
&= \nabla\times(\varphi\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{A}}_c)+\nabla\times(\varphi_c\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{A}}) \\
&= \nabla\varphi\times\mathbf{A}_c+\varphi_c\nabla\times\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{A}} \\
&= \mathrm{grad}\varphi\times\mathbf{A}+\varphi\mathrm{rot}\mathbf{A}
\end{aligned}
$$

例 13 试证 $\mathrm{rot}(\varphi\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{I}})=\mathrm{grad}\varphi\times\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{I}}$，式中，$\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{I}}$ 为恒等并矢。

证：

$$\begin{aligned}\mathrm{rot}(\varphi\overleftrightarrow{\mathbf{I}}) &= \nabla\times(\varphi\overleftrightarrow{\mathbf{I}})\\ &= \nabla\varphi\times\overleftrightarrow{\mathbf{I}} = \mathrm{grad}\varphi\times\overleftrightarrow{\mathbf{I}}\end{aligned}$$

例 14 试证 $\mathrm{rot}(\overleftrightarrow{\mathbf{I}}\times\mathbf{a}) = \mathbf{a}\mathrm{grad} - \overleftrightarrow{\mathbf{I}}\mathrm{div}\mathbf{a}$。

证：

$$\begin{aligned}\mathrm{rot}(\overleftrightarrow{\mathbf{I}}\times\mathbf{a}) &= \nabla\times(\overleftrightarrow{\mathbf{I}}\times\mathbf{a})\\ &= \nabla\times(\mathbf{a}\times\overleftrightarrow{\mathbf{I}})\ (\text{用公式 } \mathbf{a}\times\overleftrightarrow{\mathbf{I}} = \overleftrightarrow{\mathbf{I}}\times\mathbf{a})\\ &= \mathbf{a}(\nabla\cdot\overleftrightarrow{\mathbf{I}}) - (\nabla\cdot\mathbf{a})\overleftrightarrow{\mathbf{I}}\\ &= \mathbf{a}\nabla - (\mathrm{div}\mathbf{a})\overleftrightarrow{\mathbf{I}}\\ &= \mathbf{a}\mathrm{grad} - (\mathrm{div}\mathbf{a})\overleftrightarrow{\mathbf{I}}\end{aligned}$$

例 15 试证 $\mathrm{rot}(\overleftrightarrow{\mathbf{A}}\times\mathbf{a}) = \mathrm{rot}\overleftrightarrow{\mathbf{A}}\times\mathbf{a} - \mathrm{grad}\mathbf{a}\overset{\times}{\times}\overleftrightarrow{\mathbf{A}}$。

证：

$$\begin{aligned}\mathrm{rot}(\overleftrightarrow{\mathbf{A}}\times\mathbf{a}) &= \nabla\times(\overleftrightarrow{\mathbf{A}}\times\mathbf{a})\\ &= \nabla\times(\overleftrightarrow{\mathbf{A}}\times\mathbf{a}_c) + \nabla\times(\overleftrightarrow{\mathbf{A}}_c\times\mathbf{a})\\ &= (\nabla\times\overleftrightarrow{\mathbf{A}})\times\mathbf{a}_c + \nabla\times(\overleftrightarrow{\mathbf{A}}_c\times\mathbf{a})\\ &\qquad\qquad [\text{用公式(5-3)}]\\ &= \mathrm{rot}\overleftrightarrow{\mathbf{A}}\times\mathbf{a} + \nabla\times(\overleftrightarrow{\mathbf{A}}_c\times\mathbf{a})\end{aligned}$$

现在令 $\overleftrightarrow{\mathbf{A}} = \mathbf{ef}$，即将 $\overleftrightarrow{\mathbf{A}}$ 写成明显的并矢形式，则

$$\begin{aligned}\nabla\times(\overleftrightarrow{\mathbf{A}}_c\times\mathbf{a}) &= \nabla\times[(\mathbf{ef})_c\times\mathbf{a}]\\ &= \nabla\times[\mathbf{e}_c\mathbf{f}_c\times(a_x\mathbf{i}+a_y\mathbf{j}+a_z\mathbf{k})]\\ &= \nabla a_x\times(\mathbf{e}_c\mathbf{f}_c\times\mathbf{i}) + \nabla a_y\times(\mathbf{e}_c\mathbf{f}_c\times\mathbf{j})\\ &\quad + \nabla a_z\times(\mathbf{e}_c\mathbf{f}_c\times\mathbf{k})\\ &= \nabla a_x\times[\mathbf{e}_c(\mathbf{f}_c\times\mathbf{i})] + \nabla a_y\times[\mathbf{e}_c(\mathbf{f}_c\times\mathbf{j})]\\ &\quad + \nabla a_z\times[\mathbf{e}_c(\mathbf{f}_c\times\mathbf{k})]\\ &= -\nabla a_x\times[\mathbf{e}_c(\mathbf{i}\times\mathbf{f}_c)] - \nabla a_y\times[\mathbf{e}_c(\mathbf{j}\times\mathbf{f}_c)]\\ &\quad - \nabla a_z\times[\mathbf{e}_c(\mathbf{k}\times\mathbf{f}_c)]\\ &= -(\nabla a_x\times\mathbf{e}_c)(\mathbf{i}\times\mathbf{f}_c) - (\nabla a_y\times\mathbf{e}_c)(\mathbf{j}\times\mathbf{f}_c)\\ &\quad - (\nabla a_z\times\mathbf{e}_c)(\mathbf{k}\times\mathbf{f}_c)\\ &= -(\mathrm{grad}a_x\times\mathbf{e})(\mathbf{i}\times\mathbf{f}_c) - (\mathrm{grad}a_y\times\mathbf{e})(\mathbf{j}\times\mathbf{f}_c)\\ &\quad - (\mathrm{grad}a_z\times\mathbf{e})(\mathbf{k}\times\mathbf{f}_c)\end{aligned}$$

$$= -\mathrm{grad}\,\mathbf{a} \overset{\times}{\times} \overleftrightarrow{\mathbf{A}}$$

按照两并矢双叉乘定义

$$(\mathbf{cd}) \overset{\times}{\times} (\mathbf{ef}) = (\mathbf{c} \times \mathbf{e})(\mathbf{d} \times \mathbf{f})$$

最后一步成立。因为，如 $\overleftrightarrow{\mathbf{A}} = \mathbf{ef}$，则

$$\begin{aligned}
&\mathrm{grad}\,\mathbf{a} \overset{\times}{\times} \overleftrightarrow{\mathbf{A}} \\
&\quad = [(\mathrm{grad}\,a_x)\mathbf{i} + (\mathrm{grad}\,a_y)\mathbf{j} + (\mathrm{grad}\,a_z)\mathbf{k}] \overset{\times}{\times} \mathbf{ef} \\
&\quad = (\mathrm{grad}\,a_x \times \mathbf{e})(\mathbf{i} \times \mathbf{f}) + (\mathrm{grad}\,a_y \times \mathbf{e})(\mathbf{j} \times \mathbf{f}) \\
&\qquad + (\mathrm{grad}\,a_z \times \mathbf{e})(\mathbf{k} \times \mathbf{f})
\end{aligned}$$

由此最后得

$$\mathrm{rot}(\overleftrightarrow{\mathbf{A}} \times \mathbf{a}) = \mathrm{rot}\overleftrightarrow{\mathbf{A}} \times \mathbf{a} - \mathrm{grad}\,\mathbf{a} \overset{\times}{\times} \overleftrightarrow{\mathbf{A}}$$

例 16 试证 $\mathrm{grad}\,\mathbf{r} = \overleftrightarrow{\mathbf{I}}$，式中，$\overleftrightarrow{\mathbf{I}}$ 为恒等并矢。

证：

$$\begin{aligned}
\mathrm{grad}\,\mathbf{r} &= \nabla \mathbf{r} \\
&= \frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{ir}) + \frac{\partial}{\partial y}(\mathbf{jr}) + \frac{\partial}{\partial z}(\mathbf{kr}) \\
&= \mathbf{ii} + \mathbf{jj} + \mathbf{kk} = \overleftrightarrow{\mathbf{I}}
\end{aligned}$$

例 17 试证

$$\mathrm{div}(\overleftrightarrow{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{a}) = \mathrm{div}\overleftrightarrow{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{a} + |\widetilde{\overleftrightarrow{\mathbf{A}}} \cdot \mathrm{grad}\,\mathbf{a}|$$

式中，$|\widetilde{\overleftrightarrow{\mathbf{A}}} \cdot \mathrm{grad}\,\mathbf{a}|$ 为并矢 $\widetilde{\overleftrightarrow{\mathbf{A}}} \cdot \mathrm{grad}\,\mathbf{a}$ 的迹。

证：

$$\begin{aligned}
\mathrm{div}(\overleftrightarrow{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{a}) &= \nabla \cdot (\overleftrightarrow{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{a}) \\
&= \nabla \cdot (\overleftrightarrow{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{a}_c) + \nabla \cdot (\overleftrightarrow{\mathbf{A}}_c \cdot \mathbf{a}) \\
&= (\nabla \cdot \overleftrightarrow{\mathbf{A}}) \cdot \mathbf{a}_c + (\nabla \cdot \overleftrightarrow{\mathbf{A}}_c) \cdot \mathbf{a} \\
&\qquad\qquad [\text{用公式}(5\text{-}2)] \\
&= (\mathrm{div}\overleftrightarrow{\mathbf{A}}) \cdot \mathbf{a} + (\nabla \cdot \overleftrightarrow{\mathbf{A}}_c) \cdot \mathbf{a}
\end{aligned}$$

现在对 $(\nabla \cdot \overleftrightarrow{\mathbf{A}}_c) \cdot \mathbf{a}$ 作下列变换：

$$
\begin{aligned}
(\nabla \cdot \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{A}}_c) \cdot \mathbf{a} &= [\nabla \cdot (\mathbf{a}'_{xc}\mathbf{i} + \mathbf{a}'_{yc}\mathbf{j} + \mathbf{a}'_{zc}\mathbf{k})] \cdot \mathbf{a} \\
&= [(\nabla \cdot \mathbf{a}'_{xc})\mathbf{i} + (\nabla \cdot \mathbf{a}'_{yc})\mathbf{j} \\
&\quad + (\nabla \cdot \mathbf{a}'_{zc})\mathbf{k}] \cdot \mathbf{a} \\
&= [(\mathbf{a}'_{xc} \cdot \nabla)\mathbf{i} + (\mathbf{a}'_{yc} \cdot \nabla)\mathbf{j} \\
&\quad + (\mathbf{a}'_{zc} \cdot \nabla)\mathbf{k}] \cdot \mathbf{a} \\
&= (\mathbf{a}'_{xc} \cdot \nabla)a_x + (\mathbf{a}'_{yc} \cdot \nabla)a_y + (\mathbf{a}'_{zc} \cdot \nabla)a_z \\
&= \mathbf{a}'_{xc} \cdot \mathrm{grad}a_x + \mathbf{a}'_{yc} \cdot \mathrm{grad}a_y + \mathbf{a}'_{zc} \cdot \mathrm{grad}a_z
\end{aligned}
$$

另一方面，按照并矢的迹的定义

$$
\begin{aligned}
|\tilde{\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{A}}} \cdot \mathrm{grad}\mathbf{a}| &= |(\mathbf{i}\mathbf{a}'_x + \mathbf{j}\mathbf{a}'_y + \mathbf{k}\mathbf{a}'_z) \cdot \mathrm{grad}\mathbf{a}| \\
&= |(\mathbf{i}\mathbf{a}'_x + \mathbf{j}\mathbf{a}'_y + \mathbf{k}\mathbf{a}'_z) \cdot [(\mathrm{grad}a_x)\mathbf{i} \\
&\quad + (\mathrm{grad}a_y)\mathbf{j} + (\mathrm{grad}a_z)\mathbf{k}]| \\
&= |(\mathbf{a}'_x \cdot \mathrm{grad}a_x)\mathbf{i}\mathbf{i} + (\mathbf{a}'_y \cdot \mathrm{grad}a_y)\mathbf{j}\mathbf{j} \\
&\quad + (\mathbf{a}'_z \cdot \mathrm{grad}a_z)\mathbf{k}\mathbf{k} + \cdots| \\
&= \mathbf{a}'_x \cdot \mathrm{grad}a_x + \mathbf{a}'_y \cdot \mathrm{grad}a_y + \mathbf{a}'_z \cdot \mathrm{grad}a_z
\end{aligned}
$$

故最后得

$$
\mathrm{div}(\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{a}) = (\mathrm{div}\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{A}}) \cdot \mathbf{a} + |\tilde{\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{A}}} \cdot \mathrm{grad}\mathbf{a}|
$$

在 $\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{A}}$ 是对称并矢的特殊情况下，$\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{A}} = \tilde{\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{A}}}$，这时

$$
\mathrm{div}(\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{a}) = (\mathrm{div}\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{a}) + |\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{A}} \cdot \mathrm{grad}\mathbf{a}|
$$

6-6　$T(\nabla,\nabla)$的定义和性质

如果在一个表达式中含有两个 ∇，并且还有其他矢量函数以及形式上的矢量代数和并矢代数运算，那么我们可以把第四章中关于 $T(\nabla,\nabla)$ 的定义推广如下：

定义　对在一个表达式中含有两个∇，并分别对每一个∇为线性的任何表达式 $T(\nabla,\nabla)$ 定义如下：

(1) 先将一个∇看作固定的矢量，例如将前一个∇看作是固定的矢量 $\mathbf{P}$，按 6-1 节的定义来理解 $T(\mathbf{P},\nabla)$，$T(\mathbf{P},\nabla)$ 简写为 $T_1(\mathbf{P})$。

(2) 在 $T_1(\mathbf{P})$ 中将 $\dot{\mathbf{P}}$ 换成 $\triangledown$，按 6-1 节的定义来理解 $T_1(\triangledown)$，所得结果即为 $T(\triangledown,\triangledown)$。

根据上述定义并参考第四章和 6-1 节，立即可得到下列结果：

(1) $(\triangledown\cdot\triangledown)\varphi=\operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi=\nabla\cdot(\nabla\varphi)$

(2) $(\triangledown\cdot\triangledown)\mathbf{a}=\operatorname{div}\operatorname{grad}\mathbf{a}=\nabla\cdot(\nabla\mathbf{a})$

(3) $\triangledown\times(\triangledown\varphi)=\operatorname{rot}\operatorname{grad}\varphi=\nabla\times(\nabla\varphi)$

(4) $\triangledown\times\triangledown\mathbf{a}=\operatorname{rot}\operatorname{grad}\mathbf{a}=\nabla\times(\nabla\mathbf{a})$

(5) $\triangledown(\triangledown\cdot\mathbf{R})=\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{R}=\nabla(\nabla\cdot\mathbf{R})$

(6) $\triangledown(\triangledown\cdot\overleftrightarrow{\mathbf{A}})=\operatorname{grad}\operatorname{div}\overleftrightarrow{\mathbf{A}}=\nabla(\nabla\cdot\overleftrightarrow{\mathbf{A}})$

(7) $\triangledown\cdot(\triangledown\times\mathbf{R})=\operatorname{div}\operatorname{rot}\mathbf{R}=\nabla\cdot(\nabla\times\mathbf{R})$

(8) $\triangledown\cdot(\triangledown\times\overleftrightarrow{\mathbf{A}})=\operatorname{div}\operatorname{rot}\overleftrightarrow{\mathbf{A}}=\nabla\cdot(\nabla\times\overleftrightarrow{\mathbf{A}})$

(9) $\triangledown\times(\triangledown\times\mathbf{R})=\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{R}=\nabla\times(\nabla\times\mathbf{R})$

(10) $\triangledown\times(\triangledown\times\overleftrightarrow{\mathbf{A}})=\operatorname{rot}\operatorname{rot}\overleftrightarrow{\mathbf{A}}=\nabla\times(\nabla\times\overleftrightarrow{\mathbf{A}})$

应用与第四章中完全相同的方法，就可证明 $T(\triangledown,\triangledown)$ 具有下列性质：

(1) 对 $T(\triangledown,\triangledown)$ 可将每一个 $\triangledown$ 看成普通矢量进行矢量代数和并矢代数运算，其结果不变。

(2) 若 $T(\mathbf{P},\mathbf{P})\equiv 0$，则 $T(\triangledown,\triangledown)\equiv 0$。

因证明过程与第四章中的完全相同，这里就不重复了。

6-7 对 $T(\triangledown,\triangledown)$ 的运算举例

下面举几个运算例子。

例 1 试证 $\operatorname{div}\operatorname{rot}\overleftrightarrow{\mathbf{A}}=0$。

证：

$$\begin{aligned}\operatorname{div}\operatorname{rot}\overleftrightarrow{\mathbf{A}}&=\triangledown\cdot(\triangledown\times\overleftrightarrow{\mathbf{A}})\\&=(\triangledown\times\triangledown)\cdot\overleftrightarrow{\mathbf{A}}\\&=0\qquad(\text{因 }\mathbf{P}\times\mathbf{P}=0)\end{aligned}$$

例 2 试证 $\operatorname{rot}\operatorname{grad}\mathbf{a}=0$。

证：

$$\begin{aligned} \text{rot grad}\mathbf{a} &= \nabla \times (\nabla \mathbf{a}) \\ &= (\nabla \times \nabla)\mathbf{a} \\ &= 0 \qquad (\text{因 } \mathbf{P} \times \mathbf{P} = 0) \end{aligned}$$

例 3 如定义 $\nabla^2 \overleftrightarrow{\mathbf{A}} = (\nabla \cdot \nabla)\overleftrightarrow{\mathbf{A}}$，试证

$$\nabla^2 \overleftrightarrow{\mathbf{A}} = \text{grad div}\overleftrightarrow{\mathbf{A}} - \text{rot rot}\overleftrightarrow{\mathbf{A}}.$$

证：

$$\begin{aligned} \text{rot rot}\overleftrightarrow{\mathbf{A}} &= \nabla \times (\nabla \times \overleftrightarrow{\mathbf{A}}) \\ &= \nabla(\nabla \cdot \overleftrightarrow{\mathbf{A}}) - (\nabla \cdot \nabla)\overleftrightarrow{\mathbf{A}} \\ &= \text{grad div}\overleftrightarrow{\mathbf{A}} - \nabla^2 \overleftrightarrow{\mathbf{A}} \end{aligned}$$

即

$$\nabla^2 \overleftrightarrow{\mathbf{A}} = \text{grad div}\,\overleftrightarrow{\mathbf{A}} - \text{rot rot}\,\overleftrightarrow{\mathbf{A}}$$

例 4 试写出$\nabla^2 \overleftrightarrow{\mathbf{A}}$在直角坐标系中的表达式。

解：

$\nabla^2 \overleftrightarrow{\mathbf{A}}$ 按定义为 $(\nabla \cdot \nabla)\overleftrightarrow{\mathbf{A}}$，而 $(\nabla \cdot \nabla)\overleftrightarrow{\mathbf{A}}$ 按定义又可写成

$$\begin{aligned} (\nabla \cdot \nabla)\overleftrightarrow{\mathbf{A}} &= \frac{\partial^2}{\partial x^2}(\mathbf{i} \cdot \mathbf{i})\overleftrightarrow{\mathbf{A}} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}(\mathbf{j} \cdot \mathbf{j})\overleftrightarrow{\mathbf{A}} \\ &\quad + \frac{\partial^2}{\partial z^2}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{k})\overleftrightarrow{\mathbf{A}} + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}(\mathbf{i} \cdot \mathbf{j})\overleftrightarrow{\mathbf{A}} + \cdots \\ &= \frac{\partial^2 \overleftrightarrow{\mathbf{A}}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \overleftrightarrow{\mathbf{A}}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \overleftrightarrow{\mathbf{A}}}{\partial z^2} \end{aligned}$$

此即 $\nabla^2 \overleftrightarrow{\mathbf{A}}$ 在直角坐标系中的表达式。

例 5 试证

$$\text{rot rot}(\varphi \overleftrightarrow{\mathbf{I}}) = \text{rot}(\text{grad}\varphi \times \overleftrightarrow{\mathbf{I}}) = \text{grad grad}\varphi - \nabla^2(\varphi \overleftrightarrow{\mathbf{I}})$$

证：

$$\begin{aligned} \text{rot rot}(\varphi \overleftrightarrow{\mathbf{I}}) &= \nabla \times [\nabla \times (\varphi \overleftrightarrow{\mathbf{I}})] \\ &= \nabla \times (\nabla \varphi \times \overleftrightarrow{\mathbf{I}}) \\ &= \nabla \times (\text{grad}\varphi \times \overleftrightarrow{\mathbf{I}}) \\ &= \text{rot}(\text{grad}\varphi \times \overleftrightarrow{\mathbf{I}}) \end{aligned}$$

另一方面，对 $\text{rot rot}(\varphi \overleftrightarrow{\mathbf{I}})$ 可作另一种变换：

$$
\begin{aligned}
\text{rot rot}(\varphi\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{I}}) &= \nabla\times[\nabla\times(\varphi\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{I}})] \\
&= \nabla[\nabla\cdot(\varphi\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{I}})]-\nabla^2(\varphi\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{I}}) \\
&= \nabla(\nabla\varphi\cdot\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{I}})-\nabla^2(\varphi\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{I}}) \\
&= \text{grad grad}\varphi-\nabla^2(\varphi\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{I}})
\end{aligned}
$$

这就是要证明的第二种形式。

6-8 积分关系式

对含有并矢的 $T(\nabla)$，可以证明一条类似于矢量微积中的关于 $T(\nabla)$ 的积分定理。

定理 如并矢 $\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{A}}$ 位于 $T(\nabla)$ 中每一项的最后(最右边)，则公式

$$
\int_V T(\nabla)dV=\int_S T(\mathbf{n})dS \tag{6-23}
$$

仍然成立；式中 $\int_V$ 表示对某一体积 V 的体积分，$\int_S$ 表示对包围此体积 V 的封闭曲面 S 的曲面积分。$\mathbf{n}$ 表示曲面 S 上某一点朝向体积 V 外部的单位法矢量。

证：因 $\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{A}}$ 处于每一项的最后，故 $T(\nabla)$ 可写成

$$
T(\nabla)=T_1(\nabla)\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{A}}=T_1(\nabla)(\mathbf{a}_x'\mathbf{i}+\mathbf{a}_y'\mathbf{j}+\mathbf{a}_z'\mathbf{k})
$$

于是

$$
\begin{aligned}
\int_V T(\nabla)dV &= \int_V T_1(\nabla)\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{A}}dV \\
&= \int_V T_1(\nabla)(\mathbf{a}_x'\mathbf{i}+\mathbf{a}_y'\mathbf{j}+\mathbf{a}_z'\mathbf{k})dV \\
&= \int_V T_1(\nabla)\mathbf{a}_x'\mathbf{i}dV+\int_V T_1(\nabla)\mathbf{a}_y'\mathbf{j}dV \\
&\quad +\int_V T_1(\nabla)\mathbf{a}_z'\mathbf{k}dV \\
&= \left(\int_V T_1(\nabla)\mathbf{a}_x'dV\right)\mathbf{i}+\left(\int_V T_1(\nabla)\mathbf{a}_y'dV\right)\mathbf{j} \\
&\quad +\left(\int_V T_1(\nabla)\mathbf{a}_z'dV\right)\mathbf{k}
\end{aligned}
$$

$$= \left(\int_S T_1(\mathbf{n})\mathbf{a}'_x dS\right)\mathbf{i} + \left(\int_S T_1(\mathbf{n})\mathbf{a}'_y dS\right)\mathbf{j}$$

$$+ \left(\int_S T_1(\mathbf{n})\mathbf{a}'_z dS\right)\mathbf{k}$$

$$= \int_S T_1(\mathbf{n})\mathbf{a}'_x \mathbf{i} dS + \int_S T_1(\mathbf{n})\mathbf{a}'_y \mathbf{j} dS$$

$$+ \int_S T_1(\mathbf{n})\mathbf{a}'_z \mathbf{k} dS$$

$$= \int_S T_1(\mathbf{n})(\mathbf{a}'_x \mathbf{i} + \mathbf{a}'_y \mathbf{j} + \mathbf{a}'_z \mathbf{k}) dS$$

$$= \int_S T_1(\mathbf{n})\overleftrightarrow{\mathbf{A}} dS = \int_S T(\mathbf{n}) dS$$

现在我们举几个有关这条定理的应用例子。

例 1 取 $T(\nabla) = \nabla\mathbf{a} = \mathrm{grad}\mathbf{a}$，得

$$\int_V \mathrm{grad}\mathbf{a} dV = \int_V \nabla\mathbf{a} dV = \int_S \mathbf{n}\mathbf{a} dS$$

例 2 取 $T(\nabla) = \nabla \cdot \overleftrightarrow{\mathbf{A}} = \mathrm{div}\overleftrightarrow{\mathbf{A}}$，得

$$\int_V \mathrm{div}\overleftrightarrow{\mathbf{A}} dV = \int_V \nabla \cdot \overleftrightarrow{\mathbf{A}} dV = \int_S \mathbf{n} \cdot \overleftrightarrow{\mathbf{A}} dS$$

例 3 取 $T(\nabla) = \nabla \times \overleftrightarrow{\mathbf{A}} = \mathrm{rot}\overleftrightarrow{\mathbf{A}}$，得

$$\int_V \mathrm{rot}\overleftrightarrow{\mathbf{A}} dV = \int_V \nabla \times \overleftrightarrow{\mathbf{A}} dV = \int_S \mathbf{n} \times \overleftrightarrow{\mathbf{A}} dS$$

例 4 试证

$$\int_V [\mathbf{a} \cdot \mathrm{grad}\ \mathrm{div}\overleftrightarrow{\mathbf{A}} - (\mathrm{grad}\ \mathrm{div}\mathbf{a}) \cdot \overleftrightarrow{\mathbf{A}}] dV$$

$$= \int_S [(\mathbf{n} \cdot \mathbf{a})\mathrm{div}\overleftrightarrow{\mathbf{A}} - \mathrm{div}\mathbf{a}(\mathbf{n} \cdot \overleftrightarrow{\mathbf{A}})] dS$$

证:

取 $T(\nabla) = (\nabla \cdot \mathbf{a})\mathrm{div}\overleftrightarrow{\mathbf{A}} - (\nabla \cdot \overleftrightarrow{\mathbf{A}})\mathrm{div}\mathbf{a}$，则

$$T(\mathbf{n}) = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{a})\mathrm{div}\overleftrightarrow{\mathbf{A}} - (\mathbf{n} \cdot \overleftrightarrow{\mathbf{A}})\mathrm{div}\mathbf{a}$$

而 $T(\nabla)$ 本身又可写成

$$T(\nabla) = (\nabla \cdot \mathbf{a})\mathrm{div}\overleftrightarrow{\mathbf{A}} - (\nabla \cdot \overleftrightarrow{\mathbf{A}})\mathrm{div}\mathbf{a}$$

$$= (\nabla \cdot \mathbf{a}_c)\mathrm{div}\overleftrightarrow{\mathbf{A}} + (\nabla \cdot \mathbf{a})(\mathrm{div}\overleftrightarrow{\mathbf{A}})_c$$

$$-(\nabla\cdot\overleftrightarrow{\mathbf{A}}_c)\mathrm{div}\mathbf{a}-(\nabla\cdot\overleftrightarrow{\mathbf{A}})(\mathrm{div}\mathbf{a})_c$$

$$=(\mathbf{a}_c\cdot\nabla)\mathrm{div}\overleftrightarrow{\mathbf{A}}+\mathrm{div}\mathbf{a}\,\mathrm{div}\overleftrightarrow{\mathbf{A}}$$

$$-(\nabla\mathrm{div}\mathbf{a})\cdot\overleftrightarrow{\mathbf{A}}_c-\mathrm{div}\mathbf{a}\,\mathrm{div}\overleftrightarrow{\mathbf{A}}$$

$$=(\mathbf{a}\cdot\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\overleftrightarrow{\mathbf{A}}-(\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\mathbf{a})\cdot\overleftrightarrow{\mathbf{A}}$$

代入公式(6-23)即得所需证明的等式。

下面我们再来举一些利用第四章中证明各种格林积分定理的例子。只要将 $T(\nabla)$ 中一个矢量调至最右边，在公式中将这个矢量换成并矢，就得到并矢分析中相对应的公式。

例 5 在格林积分定理 4 中，将 $T(\nabla)$ 写成

$$\mathrm{rot\,rot}\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}-\mathbf{a}\cdot\mathrm{rot\,rot}\mathbf{b}$$

将 $\mathbf{b}$ 换成并矢 $\overleftrightarrow{\mathbf{A}}$，就得到并矢分析中相对应的公式：

$$\int_V(\mathrm{rot\,rot}\mathbf{a}\cdot\overleftrightarrow{\mathbf{A}}-\mathbf{a}\cdot\mathrm{rot\,rot}\overleftrightarrow{\mathbf{A}})dV$$

$$=\int_S[(\mathbf{n}\times\mathbf{a})\cdot\mathrm{rot}\overleftrightarrow{\mathbf{A}}+(\mathbf{n}\times\mathrm{rot}\mathbf{a})\cdot\overleftrightarrow{\mathbf{A}}]dS$$

例 6 在格林积分定理 8 中，将 $T(\nabla)$ 写成

$$\mathbf{a}\cdot\nabla^2\mathbf{b}-\nabla^2\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$$

将 $\mathbf{b}$ 换成并矢 $\overleftrightarrow{\mathbf{A}}$，就得到并矢分析中相对应的公式：

$$\int_V(\mathbf{a}\cdot\nabla^2\overleftrightarrow{\mathbf{A}}-\nabla^2\mathbf{a}\cdot\overleftrightarrow{\mathbf{A}})dV$$

$$=\int_S[(\mathbf{n}\cdot\mathbf{a})\mathrm{div}\overleftrightarrow{\mathbf{A}}-\mathrm{div}\mathbf{a}(\mathbf{n}\cdot\overleftrightarrow{\mathbf{A}})$$

$$+(\mathbf{n}\times\mathbf{a})\cdot\mathrm{rot}\overleftrightarrow{\mathbf{A}}+(\mathbf{n}\times\mathrm{rot}\mathbf{a})\cdot\overleftrightarrow{\mathbf{A}}]dS$$

例 7 在格林定理 3 中，将 $T(\nabla)$ 写成

$$\mathrm{rot}\mathbf{a}\cdot\mathrm{rot}\mathbf{b}-\mathbf{a}\cdot\mathrm{rot\,rot}\mathbf{b}$$

将 $\mathbf{b}$ 换成并矢 $\overleftrightarrow{\mathbf{B}}$，就得到并矢分析中相对应的公式：

$$\int_V(\mathrm{rot}\mathbf{a}\cdot\mathrm{rot}\overleftrightarrow{\mathbf{B}}-\mathbf{a}\cdot\mathrm{rot\,rot}\overleftrightarrow{\mathbf{B}})dV$$

$$=\int_S\mathbf{n}\cdot(\mathbf{a}\times\mathrm{rot}\overleftrightarrow{\mathbf{B}})dS$$

例 8 在格林积分定理 5 中，将 $T(\nabla)$ 写成

$$\mathrm{div}\mathbf{b}\cdot\mathrm{div}\mathbf{a}+\mathbf{b}\cdot\mathrm{grad\,div}\mathbf{a}$$

将 $\mathbf{a}$ 换成 $\overleftrightarrow{\mathbf{A}}$，就得到并矢分析中相对应的公式：

$$\int_V (\mathrm{div}\mathbf{b}\,\mathrm{div}\overleftrightarrow{\mathbf{A}} + \mathbf{b}\cdot\mathrm{grad}\ \mathrm{div}\overleftrightarrow{\mathbf{A}})dV = \int_S (\mathrm{div}\overleftrightarrow{\mathbf{A}})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{n})dS$$

例 9　在格林积分定理 7 中，将 $T(\nabla)$ 写成

$$\mathbf{a}\cdot\nabla^2\mathbf{b} + \mathrm{rot}\mathbf{a}\cdot\mathrm{rot}\mathbf{b} + \mathrm{div}\mathbf{a}\,\mathrm{div}\mathbf{b}$$

将 $\mathbf{b}$ 换成并矢 $\overleftrightarrow{\mathbf{A}}$，就得到并矢分析中相对应的公式：

$$\int_V (\mathbf{a}\cdot\nabla^2\overleftrightarrow{\mathbf{A}} + \mathrm{rot}\mathbf{a}\cdot\mathrm{rot}\overleftrightarrow{\mathbf{A}} + \mathrm{div}\mathbf{a}\,\mathrm{div}\overleftrightarrow{\mathbf{A}})dV = \int_S [(\mathbf{n}\times\mathbf{a})\cdot\mathrm{rot}\overleftrightarrow{\mathbf{A}} + (\mathbf{n}\cdot\mathbf{a})\mathrm{div}\overleftrightarrow{\mathbf{A}}]dS$$

例 10　在格林积分定理 9 中，将 $T(\nabla)$ 写成

$$\mathbf{a}\,\mathrm{div}\mathbf{b} + (\mathrm{div}\mathbf{a})\mathbf{b} - \mathbf{a}\times\mathrm{rot}\mathbf{b} + \mathrm{rot}\mathbf{a}\times\mathbf{b}$$

将 $\mathbf{b}$ 换成并矢 $\overleftrightarrow{\mathbf{A}}$，就得到并矢分析中相对应的公式：

$$\int_V (\mathbf{a}\,\mathrm{div}\overleftrightarrow{\mathbf{A}} + (\mathrm{div}\mathbf{a})\overleftrightarrow{\mathbf{A}} - \mathbf{a}\times\mathrm{rot}\overleftrightarrow{\mathbf{A}} + \mathrm{rot}\mathbf{a}\times\overleftrightarrow{\mathbf{A}})dV = \int_S [\mathbf{a}(\mathbf{n}\cdot\overleftrightarrow{\mathbf{A}}) + (\mathbf{n}\cdot\mathbf{a})\overleftrightarrow{\mathbf{A}} - \mathbf{n}(\mathbf{a}\cdot\overleftrightarrow{\mathbf{A}})]dS$$

例 11　在格林积分定理 10 中，将 $T(\nabla)$ 写成

$$(\mathrm{div}\mathbf{a})\mathbf{b} + (\mathbf{a}\cdot\nabla)\mathbf{b}$$

将 $\mathbf{b}$ 换成并矢 $\overleftrightarrow{\mathbf{A}}$，就得到并矢分析中相对应的公式：

$$\int_V [(\mathrm{div}\mathbf{a})\overleftrightarrow{\mathbf{A}} + (\mathbf{a}\cdot\nabla)\overleftrightarrow{\mathbf{A}}]dV = \int_S (\mathbf{n}\cdot\mathbf{a})\overleftrightarrow{\mathbf{A}}dS$$

例 12　在格林积分定理 11 中，将 $T(\nabla)$ 写成

$$\mathrm{grad}A\cdot\mathrm{rot}\mathbf{V}$$

将 $\mathbf{V}$ 换成并矢 $\overleftrightarrow{\mathbf{V}}$，就得到并矢分析中相对应的公式

$$\int_V \mathrm{grad}A\cdot\mathrm{rot}\overleftrightarrow{\mathbf{V}}dV = \int_S (\mathbf{n}\cdot A)\mathrm{rot}\overleftrightarrow{\mathbf{V}}dS$$

例 13　在格林积分定理 12 中，将 $T(\nabla)$ 写成

$$A\,\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\mathbf{V} + (\nabla^2 A)\mathbf{V} + \mathrm{grad}A\,\mathrm{div}\mathbf{V}$$

将 $\mathbf{V}$ 换成并矢 $\overleftrightarrow{\mathbf{Q}}$，就得到并矢分析中相对应的公式

$$\int_V [A\mathrm{rot\,rot}\overleftrightarrow{\mathbf{Q}} + (\nabla^2 A)\overleftrightarrow{\mathbf{Q}} + \mathrm{grad}A\mathrm{div}\overleftrightarrow{\mathbf{Q}}]dV$$

$$= \int_S [A\mathbf{n} \times \mathrm{rot}\overleftrightarrow{\mathbf{Q}} + (\mathrm{grad}A)(\mathbf{n} \cdot \overleftrightarrow{\mathbf{Q}}) - \mathrm{grad}A \times (\mathbf{n} \times \overleftrightarrow{\mathbf{Q}})]dS$$

这里我们再来证明几个有关线积分的公式。

(1) 试证

$$\int_l d\mathbf{l} \cdot \overleftrightarrow{\mathbf{A}} = \int_S \mathbf{n} \cdot \mathrm{rot}\overleftrightarrow{\mathbf{A}}dS \tag{6-24}$$

式中，l 为某一封闭环路；S 为张于此环路上的任一曲面；$d\mathbf{l}$ 为线元；$\mathbf{n}$ 为单位法矢量。$d\mathbf{l}$ 与 $\mathbf{n}$ 成右手螺旋关系

证：将 $\overleftrightarrow{\mathbf{A}}$ 写成分量形式，有

$$\int_l d\mathbf{l} \cdot \overleftrightarrow{\mathbf{A}} = \left(\int_l d\mathbf{l} \cdot \mathbf{a}'_x\right)\mathbf{i} + \left(\int_l (d\mathbf{l} \cdot \mathbf{a}'_y)\right)\mathbf{j} + \left(\int_l d\mathbf{l} \cdot \mathbf{a}'_z\right)\mathbf{k}$$

$$= \left(\int_S \mathbf{n} \cdot \mathrm{rot}\mathbf{a}'_x dS\right)\mathbf{i} + \left(\int_S \mathbf{n} \cdot \mathrm{rot}\mathbf{a}'_y dS\right)\mathbf{j} + \left(\int_S \mathbf{n} \cdot \mathrm{rot}\mathbf{a}'_z dS\right)\mathbf{k}$$

$$= \left(\int_S \mathbf{n} \cdot [\nabla \times \mathbf{a}'_x]\mathbf{i}dS\right) + \left(\int_S \mathbf{n} \cdot [\nabla \times \mathbf{a}'_y]\mathbf{j}dS\right) + \left(\int_S \mathbf{n} \cdot [\nabla \times \mathbf{a}'_z]\mathbf{k}\right)dS$$

$$= \int_S \mathbf{n} \cdot [\nabla \times (\mathbf{a}'_x\mathbf{i} + \mathbf{a}'_y\mathbf{j} + \mathbf{a}'_z\mathbf{k})]dS$$

$$= \int_S \mathbf{n} \cdot [\nabla \times \overleftrightarrow{\mathbf{A}}]dS = \int_S \mathbf{n} \cdot \mathrm{rot}\overleftrightarrow{\mathbf{A}}dS$$

(2) 试证

$$\int_l d l\mathbf{a} = \int_S \mathbf{n} \times \mathrm{grad}\mathbf{a}dS \tag{6-25}$$

证：应用公式

$$\int_l (d\mathbf{l})\varphi = \int_S \mathbf{n} \times \mathrm{grad}\varphi dS$$

和用证明式(6-24)的方法,即可得证。

(3) 试证

$$\int_l d\mathbf{l} \times \mathbf{a} = \int_S (\mathbf{n} \cdot \mathbf{a}\mathrm{grad} - \mathbf{n}\mathrm{div}\mathbf{a})dS \qquad (6\text{-}26)$$

证:应用 4-23 节中公式 2 的符号运算法,有

$$\int_l d\mathbf{l} \times \mathbf{a} = \int_S [\mathbf{n}_c \times \nabla] \times \mathbf{a} dS$$

$$= \int_S [(\mathbf{n}_c \cdot \mathbf{a})\nabla - \mathbf{n}_c(\nabla \cdot \mathbf{a})]dS$$

$$= \int_S [\mathbf{n}_c \cdot (\mathbf{a}\nabla) - \mathbf{n}\mathrm{div}\mathbf{a}]dS$$

$$= \int_S [\mathbf{n} \cdot (\mathbf{a}\mathrm{grad}) - \mathbf{n}\mathrm{div}\mathbf{a}]dS$$

(4) 试证

$$\int_M^N d\mathbf{l} \cdot \mathrm{grad}\mathbf{a} = \mathbf{a}(N) - \mathbf{a}(M)$$

式中,M和N为空间任意两点,沿连接此两点的任意曲线进行积分。

证:用公式

$$\int_M^N d\mathbf{l} \cdot \mathrm{grad}\varphi = \varphi(N) - \varphi(M)$$

及用证明公式(6-24)的方法,即可得证。

在结束本节之前,我们再来证明两个最先由 C. T. Tai 推导出来的包含两并矢的积分关系式. 证明的思路是在包含一个并矢的积分关系式中,利用并矢代数公式将同样的矢量调至各项的最后,接着用证明本节定理的方法求证。

在例 7 中已经证明

$$\int_V (\mathrm{rot}\mathbf{a} \cdot \mathrm{rot}\overleftrightarrow{\mathbf{B}} - \mathbf{a} \cdot \mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\overleftrightarrow{\mathbf{B}})dV$$

$$= \int_S \mathbf{n} \cdot (\mathbf{a} \times \mathrm{rot}\overleftrightarrow{\mathbf{B}})dS$$

利用并矢代数公式

$$\mathbf{a}\cdot\widetilde{\overleftrightarrow{\mathbf{b}}}=\overleftrightarrow{\mathbf{b}}\cdot\mathbf{a}\quad[\text{式}(5\text{-}25)]$$

上式可写成

$$\int_V[\widetilde{(\mathrm{rot}\overleftrightarrow{\mathbf{B}})}\cdot\mathrm{rot}\mathbf{a}-\widetilde{(\mathrm{rot\,rot}\overleftrightarrow{\mathbf{B}})}\cdot\mathbf{a}]dV$$

$$=\int_S\widetilde{(\mathrm{rot}\overleftrightarrow{\mathbf{B}})}\cdot(\mathbf{n}\times\mathbf{a})dS$$

将矢量 $\mathbf{a}$ 换成并矢 $\overleftrightarrow{\mathbf{A}}$,即得第一个包含两并矢的积分关系式:

$$\int_V[\widetilde{(\mathrm{rot}\overleftrightarrow{\mathbf{B}})}\cdot\mathrm{rot}\overleftrightarrow{\mathbf{A}}-\widetilde{(\mathrm{rot\,rot}\overleftrightarrow{\mathbf{B}})}\cdot\overleftrightarrow{\mathbf{A}}]dV$$

$$=\int_S\widetilde{(\mathrm{rot}\overleftrightarrow{\mathbf{B}})}\cdot(\mathbf{n}\times\overleftrightarrow{\mathbf{A}})dS\qquad(6\text{-}27)$$

在格林定理 3 中交换 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$,则

$$\int_V(\mathrm{rot}\mathbf{a}\cdot\mathrm{rot}\mathbf{b}-\mathrm{rot\,rot}\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})dV$$

$$=-\int_S\mathbf{n}\cdot(\mathrm{rot}\mathbf{a}\times\mathbf{b})dS$$

将 $\mathbf{b}$ 换成并矢 $\overleftrightarrow{\mathbf{B}}$,就得到

$$\int_V(\mathrm{rot}\mathbf{a}\cdot\mathrm{rot}\overleftrightarrow{\mathbf{B}}-\mathrm{rot\,rot}\mathbf{a}\cdot\overleftrightarrow{\mathbf{B}})dV$$

$$=-\int_S\mathbf{n}\cdot(\mathrm{rot}\mathbf{a}\times\overleftrightarrow{\mathbf{B}})dS\qquad(6\text{-}28)$$

由式(6-28)减去例 7 中的公式,得

$$\int_V(\mathbf{a}\cdot\mathrm{rot\,rot}\overleftrightarrow{\mathbf{B}}-\mathrm{rot\,rot}\mathbf{a}\cdot\overleftrightarrow{\mathbf{B}})dV$$

$$=-\int_S\mathbf{n}\cdot(\mathbf{a}\times\mathrm{rot}\overleftrightarrow{\mathbf{B}}+\mathrm{rot}\mathbf{a}\times\overleftrightarrow{\mathbf{B}})dS\qquad(6\text{-}29)$$

这是一个很有用的公式.

利用并矢代数公式(6-28)可写成;

$$\int_V[\widetilde{(\mathrm{rot}\overleftrightarrow{\mathbf{B}})}\cdot\mathrm{rot}\mathbf{a}-(\widetilde{\overleftrightarrow{\mathbf{B}}})\cdot\mathrm{rot\,rot}\mathbf{a}]dV$$

$$=-\int_S(\widetilde{\overleftrightarrow{\mathbf{B}}})\cdot(\mathbf{n}\times\mathrm{rot}\mathbf{a})dS$$

将 $\mathbf{a}$ 换成并矢 $\overleftrightarrow{\mathbf{A}}$，得

$$\int_V [\widetilde{(\mathrm{rot}\overleftrightarrow{\mathbf{B}})} \cdot \mathrm{rot}\overleftrightarrow{\mathbf{A}} - (\widetilde{\overleftrightarrow{\mathbf{B}}}) \cdot \mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\overleftrightarrow{\mathbf{A}}]dV$$

$$= -\int_S (\widetilde{\overleftrightarrow{\mathbf{B}}}) \cdot (\mathbf{n} \times \mathrm{rot}\overleftrightarrow{\mathbf{A}})dS. \tag{6-30}$$

由式(6-30)减去(6-27)，得

$$\int_V [\widetilde{(\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\overleftrightarrow{\mathbf{B}})} \cdot \overleftrightarrow{\mathbf{A}} - (\widetilde{\overleftrightarrow{\mathbf{B}}}) \cdot \mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\overleftrightarrow{\mathbf{A}}]dV$$

$$= -\int_S [\widetilde{(\mathrm{rot}\overleftrightarrow{\mathbf{B}})} \cdot (\mathbf{n} \times \overleftrightarrow{\mathbf{A}})$$

$$+ (\widetilde{\overleftrightarrow{\mathbf{B}}}) \cdot (\mathbf{n} \times \mathrm{rot}\overleftrightarrow{\mathbf{A}})]dS$$

这就是我们要证明的第二个包含两并矢的积分关系式。

6-9 圆柱坐标系中 $\mathrm{grad}\mathbf{a}, \mathrm{div}\overleftrightarrow{\mathbf{A}}, \mathrm{rot}\overleftrightarrow{\mathbf{A}}, \nabla^2\overleftrightarrow{\mathbf{A}}$ 的表达式

在这一节中，我们分别来求 $\mathrm{grad}\mathbf{a}$，$\mathrm{div}\overleftrightarrow{\mathbf{A}}$，$\mathrm{rot}\overleftrightarrow{\mathbf{A}}$ 和 $\nabla^2\overleftrightarrow{\mathbf{A}}$ 在圆柱坐标系中的表达式，供读者需要时查阅用。

令坐标轴上的单位矢量为 $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_z$，则 $\overleftrightarrow{\mathbf{A}}$ 可写成

$$\overleftrightarrow{\mathbf{A}} = \mathbf{a}'_r\mathbf{e}_r + \mathbf{a}'_\varphi\mathbf{e}_\varphi + \mathbf{a}'_z\mathbf{e}_z$$

$$= \mathbf{e}_r\mathbf{a}_r + \mathbf{e}_\varphi\mathbf{a}_\varphi + \mathbf{e}_z\mathbf{a}_z$$

$\mathbf{a}$ 可写成

$$\mathbf{a} = a_r\mathbf{e}_r + a_\varphi\mathbf{e}_\varphi + a_z\mathbf{e}_z$$

(1) 求 $\mathrm{grad}\mathbf{a}$ 的表达式

在第四章中我们已经证明 $\mathrm{grad}\varphi = \nabla\varphi$，而在第三章中我们已经证明算子$\nabla$在正交曲线坐标系中的一般表达式为

$$\nabla = \frac{\mathbf{e}_u}{L_u}\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\mathbf{e}_v}{L_v}\frac{\partial}{\partial v} + \frac{\mathbf{e}_w}{L_w}\frac{\partial}{\partial w}$$

将这算子应用到 $\mathbf{a}$ 上，得 $\mathrm{grad}\mathbf{a}$ 在正交曲线坐标系中的一般表达式

$$\operatorname{grad}\mathbf{a} = \frac{\mathbf{e}_u}{L_u}\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial u} + \frac{\mathbf{e}_v}{L_v}\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial v} + \frac{\mathbf{e}_w}{L_w}\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial w} \tag{6-31}$$

在圆柱坐标系中

$$\mathbf{e}_u = \mathbf{e}_r,\ \mathbf{e}_v = \mathbf{e}_\varphi,\ \mathbf{e}_w = \mathbf{e}_z$$

$$L_u = 1,\ L_v = r,\ L_z = 1$$

将它们代入式(6-31),得到圆柱坐标系中 $\operatorname{grad}\mathbf{a}$ 的表示式为

$$\operatorname{grad}\mathbf{a} = \mathbf{e}_r\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial r} + \frac{\mathbf{e}_\varphi}{r}\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \varphi} + \mathbf{e}_z\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial z} \tag{6-32}$$

将 $\mathbf{a} = a_r\mathbf{e}_r + a_\varphi\mathbf{e}_\varphi + a_z\mathbf{e}_z$ 代入上式,并利用下列关系式(单位矢量的导数，见第三章):

$$\frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial r} = 0 \qquad \frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \varphi} = \mathbf{e}_\varphi \qquad \frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial \mathbf{e}_\varphi}{\partial r} = 0 \qquad \frac{\partial \mathbf{e}_\varphi}{\partial \varphi} = -\mathbf{e}_r \qquad \frac{\partial \mathbf{e}_\varphi}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial \mathbf{e}_z}{\partial r} = 0 \qquad \frac{\partial \mathbf{e}_z}{\partial \varphi} = 0 \qquad \frac{\partial \mathbf{e}_z}{\partial z} = 0$$

经过简单的推导，即得

$$\operatorname{grad}\mathbf{a} = \left(\operatorname{grad}a_r - \frac{a_\varphi\mathbf{e}_\varphi}{r}\right)\mathbf{e}_r + \left(\operatorname{grad}a_\varphi + \frac{a_r\mathbf{e}_\varphi}{r}\right)\mathbf{e}_\varphi + (\operatorname{grad}a_z)\mathbf{e}_z \tag{6-33}$$

从式(6-33)可见，

$$\operatorname{grad}\mathbf{e}_r = \frac{\mathbf{e}_\varphi\mathbf{e}_\varphi}{r}$$

$$\operatorname{grad}\mathbf{e}_\varphi = -\frac{\mathbf{e}_\varphi\mathbf{e}_r}{r}$$

$$\operatorname{grad}\mathbf{e}_z = 0$$

(2) 求 $\operatorname{div}\overleftrightarrow{\mathbf{A}}$ 的表达式

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}\overleftrightarrow{\mathbf{A}} &= \nabla\cdot\overleftrightarrow{\mathbf{A}} = \nabla\cdot(\mathbf{a}'_r\mathbf{e}_r + \mathbf{a}'_\varphi\mathbf{e}_\varphi + \mathbf{a}'_z\mathbf{e}_z) \\
&= (\nabla\cdot\mathbf{a}'_r)\mathbf{e}_r + (\nabla\cdot\mathbf{a}'_\varphi)\mathbf{e}_\varphi + (\nabla\cdot\mathbf{a}'_z)\mathbf{e}_z \\
&= (\operatorname{div}\mathbf{a}'_r)\mathbf{e}_r + (\operatorname{div}\mathbf{a}'_\varphi)\mathbf{e}_\varphi + (\operatorname{div}\mathbf{a}'_z)\mathbf{e}_z \\
&\quad + (\mathbf{a}'_{rc}\cdot\nabla)\mathbf{e}_r + (\mathbf{a}'_{\varphi c}\cdot\nabla)\mathbf{e}_\varphi + (\mathbf{a}'_{zc}\cdot\nabla)\mathbf{e}_z
\end{aligned}$$

但是

$$(\mathbf{a}'_{rc}\cdot\nabla)\mathbf{e}_r=\mathbf{a}'_{rc}\cdot\mathrm{grad}\,\mathbf{e}_r=\frac{(\mathbf{a}'_r\cdot\mathbf{e}_\varphi)}{r}\mathbf{e}_\varphi=\frac{a'_{r\varphi}}{r}\mathbf{e}_\varphi$$

$$(\mathbf{a}'_{\varphi c}\cdot\nabla)\mathbf{e}_\varphi=\mathbf{a}'_{\varphi c}\cdot\nabla\mathbf{e}_\varphi=\mathbf{a}'_\varphi\cdot\mathrm{grad}\,\mathbf{e}_\varphi=-\frac{a'_{\varphi\varphi}}{r}\mathbf{e}_r$$

$$(\mathbf{a}'_{zc}\cdot\nabla)\mathbf{e}_z=0$$

(因为 $\mathbf{e}_z$为常矢量,)所以最后得

$$\mathrm{div}\overleftrightarrow{\mathbf{A}}=\left(\mathrm{div}\,\mathbf{a}'_r-\frac{a'_{\varphi\varphi}}{r}\right)\mathbf{e}_r+\left(\mathrm{div}\,\mathbf{a}'_\varphi+\frac{a'_{r\varphi}}{r}\right)\mathbf{e}_\varphi$$
$$+(\mathrm{div}\,\mathbf{a}'_z)\mathbf{e}_z$$

我们还可以推导出 $\mathrm{div}\,\overleftrightarrow{\mathbf{A}}$ 的另一形式。我们知道，如果把 $\overleftrightarrow{\mathbf{A}}$ 写成

$$\overleftrightarrow{\mathbf{A}}=\mathbf{i}\mathbf{a}_x+\mathbf{j}\mathbf{a}_y+\mathbf{k}\mathbf{a}_z$$

则

$$\begin{aligned}\mathrm{div}\overleftrightarrow{\mathbf{A}}&=\nabla\cdot\overleftrightarrow{\mathbf{A}}\\&=\nabla\cdot(\mathbf{i}\mathbf{a}_x+\mathbf{j}\mathbf{a}_y+\mathbf{k}\mathbf{a}_z)\\&=\mathbf{i}\cdot\nabla\mathbf{a}_x+\mathbf{j}\cdot\nabla\mathbf{a}_y+\mathbf{k}\cdot\nabla\mathbf{a}_z\end{aligned}$$

利用式(6-32),即得

$$\begin{aligned}\mathrm{div}\overleftrightarrow{\mathbf{A}}=\mathbf{i}\cdot&\left(\mathbf{e}_r\frac{\partial\mathbf{a}_x}{\partial r}+\mathbf{e}_\varphi\frac{1}{r}\frac{\partial\mathbf{a}_x}{\partial\varphi}+\mathbf{e}_z\frac{\partial\mathbf{a}_x}{\partial z}\right)\\&+\mathbf{j}\cdot\left(\mathbf{e}_r\frac{\partial\mathbf{a}_y}{\partial r}+\mathbf{e}_\varphi\frac{1}{r}\frac{\partial\mathbf{a}_y}{\partial\varphi}+\mathbf{e}_z\frac{\partial\mathbf{a}_y}{\partial z}\right)\\&+\mathbf{k}\cdot\left(\mathbf{e}_r\frac{\partial\mathbf{a}_z}{\partial r}+\mathbf{e}_\varphi\frac{1}{r}\frac{\partial\mathbf{a}_z}{\partial\varphi}+\mathbf{e}_z\frac{\partial\mathbf{a}_z}{\partial z}\right)\\=\mathbf{e}_r\cdot&\frac{\partial\overleftrightarrow{\mathbf{A}}}{\partial r}+\mathbf{e}_\varphi\cdot\frac{1}{r}\frac{\partial\overleftrightarrow{\mathbf{A}}}{\partial\varphi}+\mathbf{e}_z\cdot\frac{\partial\overleftrightarrow{\mathbf{A}}}{\partial z}\end{aligned}$$

现在分别来求各导数。

1) $$\frac{\partial\overleftrightarrow{\mathbf{A}}}{\partial r}=\left(\frac{\partial\mathbf{e}_r}{\partial r}\right)\mathbf{a}_r+\mathbf{e}_r\frac{\partial\mathbf{a}_r}{\partial r}+\left(\frac{\partial\mathbf{e}_\varphi}{\partial r}\right)\mathbf{a}_\varphi$$
$$+\mathbf{e}_\varphi\frac{\partial\mathbf{a}_\varphi}{\partial r}+\mathbf{e}_z\frac{\partial\mathbf{a}_z}{\partial r}$$

$$= \mathbf{e}_r \frac{\partial \mathbf{a}_r}{\partial r} + \mathbf{e}_\varphi \frac{\partial \mathbf{a}_\varphi}{\partial r} + \mathbf{e}_z \frac{\partial \mathbf{a}_z}{\partial r}$$

$$\left(\frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{e}_\varphi}{\partial r} = 0\right)$$

故

$$\mathbf{e}_r \cdot \frac{\partial \overleftrightarrow{\mathbf{A}}}{\partial r} = \frac{\partial \mathbf{a}_r}{\partial r}$$

2) $\dfrac{\partial \overleftrightarrow{\mathbf{A}}}{\partial \varphi} = \left(\dfrac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \varphi}\right)\mathbf{a}_r + \mathbf{e}_r \dfrac{\partial \mathbf{a}_r}{\partial \varphi} + \left(\dfrac{\partial \mathbf{e}_\varphi}{\partial \varphi}\right)\mathbf{a}_\varphi$

$$+ \mathbf{e}_\varphi \frac{\partial \mathbf{a}_\varphi}{\partial \varphi} + \mathbf{e}_z \frac{\partial \mathbf{a}_z}{\partial \varphi}$$

$$= \mathbf{e}_\varphi \mathbf{a}_r + \mathbf{e}_r \frac{\partial \mathbf{a}_r}{\partial \varphi} - \mathbf{e}_r \mathbf{a}_\varphi + \mathbf{e}_\varphi \frac{\partial \mathbf{a}_\varphi}{\partial \varphi} + \mathbf{e}_z \frac{\partial \mathbf{a}_z}{\partial \varphi}$$

这是因为

$$\frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \varphi} = \mathbf{e}_\varphi, \quad \frac{\partial \mathbf{e}_\varphi}{\partial \varphi} = -\mathbf{e}_r$$

于是

$$\mathbf{e}_\varphi \cdot \frac{1}{r} \frac{\partial \overleftrightarrow{\mathbf{A}}}{\partial \varphi} = \frac{\mathbf{a}_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \mathbf{a}_\varphi}{\partial \varphi}$$

3) $\mathbf{e}_z \cdot \dfrac{\partial \overleftrightarrow{\mathbf{A}}}{\partial z} = \dfrac{\partial \mathbf{a}_z}{\partial z}$

于是得 $\mathrm{div}\overleftrightarrow{\mathbf{A}}$ 的另一形式:

$$\mathrm{div}\overleftrightarrow{\mathbf{A}} = \frac{\mathbf{a}_r}{r} + \frac{\partial \mathbf{a}_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \mathbf{a}_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial \mathbf{a}_z}{\partial z}$$

(3) 求 $\mathrm{rot}\overleftrightarrow{\mathbf{A}}$ 的表达式

$$\mathrm{rot}\overleftrightarrow{\mathbf{A}} = \nabla \times \overleftrightarrow{\mathbf{A}} = \nabla \times (\mathbf{i}\mathbf{a}_x + \mathbf{j}\mathbf{a}_y + \mathbf{k}\mathbf{a}_z)$$

$$= -\mathbf{i} \times \nabla \mathbf{a}_x - \mathbf{j} \times \nabla \mathbf{a}_y - \mathbf{k} \times \nabla \mathbf{a}_z$$

利用式(6-32),即得

$$\mathrm{rot}\overleftrightarrow{\mathbf{A}} = \mathbf{e}_r \times \frac{\partial \overleftrightarrow{\mathbf{A}}}{\partial r} + \mathbf{e}_\varphi \times \frac{1}{r} \frac{\partial \overleftrightarrow{\mathbf{A}}}{\partial \varphi} + \mathbf{e}_z \times \frac{\partial \overleftrightarrow{\mathbf{A}}}{\partial z}$$

但是

$$\mathbf{e}_r \times \frac{\partial \overleftrightarrow{\mathbf{A}}}{\partial r} = \mathbf{e}_z \frac{\partial \mathbf{a}_\varphi}{\partial r} - \mathbf{e}_\varphi \frac{\partial \mathbf{a}_z}{\partial r}$$

$$\frac{1}{r}\mathbf{e}_\varphi \times \frac{\partial \overleftrightarrow{\mathbf{A}}}{\partial \varphi} = \frac{1}{r}\left(-\mathbf{e}_z \frac{\partial \mathbf{a}_r}{\partial \varphi} + \mathbf{e}_z \mathbf{a}_\varphi + \mathbf{e}_r \frac{\partial \mathbf{a}_z}{\partial \varphi}\right)$$

$$\mathbf{e}_z \times \frac{\partial \overleftrightarrow{\mathbf{A}}}{\partial z} = \mathbf{e}_\varphi \frac{\partial \mathbf{a}_r}{\partial z} - \mathbf{e}_r \frac{\partial \mathbf{a}_\varphi}{\partial z}$$

于是得 $\mathrm{rot}\overleftrightarrow{\mathbf{A}}$ 的一种表达式:

$$\mathrm{rot}\overleftrightarrow{\mathbf{A}} = \mathbf{e}_r\left(\frac{1}{r}\frac{\partial \mathbf{a}_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial \mathbf{a}_\varphi}{\partial z}\right) + \mathbf{e}_\varphi\left(\frac{\partial \mathbf{a}_r}{\partial z} - \frac{\partial \mathbf{a}_z}{\partial r}\right)$$
$$+ \mathbf{e}_z\left(\frac{\mathbf{a}_\varphi}{r} + \frac{\partial \mathbf{a}_\varphi}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial \mathbf{a}_r}{\partial \varphi}\right)$$

我们还可推导出 $\mathrm{rot}\overleftrightarrow{\mathbf{A}}$ 的另一种表达式:

$$\mathrm{rot}\overleftrightarrow{\mathbf{A}} = \nabla \times \overleftrightarrow{\mathbf{A}} = \nabla \times (\mathbf{a}'_r\mathbf{e}_r + \mathbf{a}'_\varphi\mathbf{e}_\varphi + \mathbf{a}'_z\mathbf{e}_z)$$
$$= (\mathrm{rot}\mathbf{a}'_r)\mathbf{e}_r + (\mathrm{rot}\mathbf{a}'_\varphi)\mathbf{e}_\varphi + (\mathrm{rot}\mathbf{a}'_z)\mathbf{e}_z$$
$$- \mathbf{a} \times \mathrm{grad}\mathbf{e}_r - \mathbf{a}'_\varphi \times \mathrm{grad}\mathbf{e}_\varphi$$

由于

$$-\mathbf{a} \times \mathrm{grad}\mathbf{e}_r = -\left(\frac{\mathbf{a}_r \times \mathbf{e}_\varphi}{r}\right)\mathbf{e}_\varphi$$

$$-\mathbf{a}_\varphi \times \mathrm{grad}\mathbf{e}_\varphi = \frac{\mathbf{a}'_\varphi \times \mathbf{e}_\varphi}{r}\mathbf{e}_r$$

将此代入上式后得

$$\mathrm{rot}\overleftrightarrow{\mathbf{A}} = \left(\mathrm{rot}\mathbf{a}_r + \frac{\mathbf{a}'_\varphi \times \mathbf{e}_\varphi}{r}\right)\mathbf{e}_r + \left(\mathrm{rot}\mathbf{a}_\varphi - \frac{\mathbf{a}'_r \times \mathbf{e}_\varphi}{r}\right)\mathbf{e}_\varphi$$
$$+ (\mathrm{rot}\mathbf{a}'_z)\mathbf{e}_z$$

(4) 求 $\nabla^2\overleftrightarrow{\mathbf{A}}$ 的表达式

我们已经证明

$$\nabla^2\overleftrightarrow{\mathbf{A}} = \mathrm{grad}\ \mathrm{div}\overleftrightarrow{\mathbf{A}} - \mathrm{rot}\ \mathrm{rot}\overleftrightarrow{\mathbf{A}}$$

而在 $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_z$ 都是并矢的前项这一条件下，$\mathrm{div}\overleftrightarrow{\mathbf{A}}$, $\mathrm{rot}\overleftrightarrow{\mathbf{A}}$ 的表达式形式上与 $\mathrm{div}\mathbf{a}, \mathrm{rot}\mathbf{a}$ 的表达式完全相同，差别仅仅是标量投影换成了矢量投影，这并不影响微分运算过程，因此可直接写出 $\nabla^2\overleftrightarrow{\mathbf{A}}$ 的表达式:

$$\nabla^2\overleftrightarrow{\mathbf{A}} = \mathbf{e}_r\left(\nabla\mathbf{a}_r - \frac{\mathbf{a}_r}{r^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial \mathbf{a}_\varphi}{\partial\varphi}\right)$$

$$+ \mathbf{e}_\varphi\left(\nabla^2\mathbf{a}_\varphi - \frac{\mathbf{a}_\varphi}{r^2} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial \mathbf{a}_r}{\partial\varphi}\right) + \mathbf{e}_z\nabla^2\mathbf{a}_z$$

6-10 球坐标系中 grad$\mathbf{a}$,div$\overleftrightarrow{\mathbf{A}}$,rot$\overleftrightarrow{\mathbf{A}}$,$\nabla^2\overleftrightarrow{\mathbf{A}}$ 的表达式

球坐标系中所用的推导方法与上一节相同，因此我们只要写出推导过程中的主要步骤而无需作详细的证明.

令坐标轴上的单位矢量为 $\mathbf{e}_r,\mathbf{e}_\theta,\mathbf{e}_\varphi$，则 $\overleftrightarrow{\mathbf{A}}$ 可写成

$$\overleftrightarrow{\mathbf{A}} = \mathbf{a}'_r\mathbf{e}_r + \mathbf{a}'_\theta\mathbf{e}_\theta + \mathbf{a}'_\varphi\mathbf{e}_\varphi$$

$$= \mathbf{e}_r\mathbf{a}_r + \mathbf{e}_\theta\mathbf{a}_\theta + \mathbf{e}_\varphi\mathbf{a}_\varphi$$

$\mathbf{a}$ 可写成

$$\mathbf{a} = a_r\mathbf{e}_r + a_\theta\mathbf{e}_\theta + a_\varphi\mathbf{e}_\varphi$$

(1) 求 grad$\mathbf{a}$ 的表达式

我们知道，grad$\mathbf{a}$ 的一般表达式是

$$\text{grad}\mathbf{a} = \frac{\mathbf{e}_u}{L_u}\frac{\partial\mathbf{a}}{\partial u} + \frac{\mathbf{e}_v}{L_v}\frac{\partial\mathbf{a}}{\partial v} + \frac{\mathbf{e}_w}{L_w}\frac{\partial\mathbf{a}}{\partial w}$$

在球坐标系中

$$\mathbf{e}_u = \mathbf{e}_r,\ \mathbf{e}_v = \mathbf{e}_\theta,\ \mathbf{e}_w = \mathbf{e}_\varphi$$

$$L_u = 1,\ L_v = r,\ L_w = r\sin\theta$$

将此代入上式,得球坐标系中 grad$\mathbf{a}$ 的表示式为

$$\text{grad}\mathbf{a} = \mathbf{e}_r\frac{\partial\mathbf{a}}{\partial r} + \frac{1}{r}\mathbf{e}_\theta\frac{\partial\mathbf{a}}{\partial\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\mathbf{a}}{\partial\varphi} \qquad (6\text{-}34)$$

将 $\mathbf{a} = a_r\mathbf{e}_r + a_\theta\mathbf{e}_\theta + a_\varphi\mathbf{e}_\varphi$ 代入上式，并利用单位矢量导数的关系式(见第三章),经过简单的推导,即得

$$\text{grad}\mathbf{a} = \left(\text{grad}a_r - \frac{a_\varphi\mathbf{e}_\varphi}{r} - \frac{a_\theta\mathbf{e}_\theta}{r}\right)\mathbf{e}_r$$

$$+ \left(\text{grad}a_\theta + \frac{a_r\mathbf{e}_\theta}{r} - \frac{a_\varphi\mathbf{e}_\varphi}{r\,\text{tg}\,\theta}\right)\mathbf{e}_\theta$$

$$+\left[\operatorname{grad} a_{\varphi}+\left(\frac{a_r}{r}+\frac{a_\theta}{r\operatorname{tg}\theta}\right)e_\varphi\right]\mathbf{e}_\varphi$$

(2) 求 $\operatorname{div}\overleftrightarrow{\mathbf{A}}$ 的表达式

$$\operatorname{div}\overleftrightarrow{\mathbf{A}}=\nabla\cdot\overleftrightarrow{\mathbf{A}}$$

$$=(\operatorname{div}\mathbf{a}'_r)\mathbf{e}_r+(\operatorname{div}\mathbf{a}'_\theta)\mathbf{e}_\theta+(\operatorname{div}\mathbf{a}'_\varphi)\mathbf{e}_\varphi$$

$$+\mathbf{a}'_r\cdot\operatorname{grad}\mathbf{e}_r+\mathbf{a}'_\theta\cdot\operatorname{grad}\mathbf{e}_\theta+\mathbf{a}'_\varphi\cdot\operatorname{grad}\mathbf{e}_\varphi$$

由于

$$\mathbf{a}'_r\cdot\operatorname{grad}\mathbf{e}_r=\frac{a'_{r\theta}\mathbf{e}_\theta}{r}+\frac{a'_{r\varphi}\mathbf{e}_\varphi}{r}$$

$$\mathbf{a}'_\theta\cdot\operatorname{grad}\mathbf{e}_\theta=\frac{-a'_{\theta\theta}\mathbf{e}_r}{r}+\frac{a'_{\theta\varphi}}{r\operatorname{tg}\theta}\mathbf{e}_\varphi$$

$$\mathbf{a}'_\varphi\cdot\operatorname{grad}\mathbf{e}_\varphi=-\frac{a'_{\varphi\varphi}}{r}\mathbf{e}_r-\frac{a'_{\varphi\varphi}}{r\operatorname{tg}\theta}\mathbf{e}_\theta$$

将此代入上式，得

$$\operatorname{div}\overleftrightarrow{\mathbf{A}}=\left(\operatorname{div}\mathbf{a}'_r-\frac{a'_{\theta\theta}+a'_{\varphi\varphi}}{r}\right)\mathbf{e}_r$$

$$+\left(\operatorname{div}\mathbf{a}'_\theta+\frac{a'_{r\theta}}{r}-\frac{a'_{\varphi\varphi}}{r\operatorname{tg}\theta}\right)\mathbf{e}_\theta$$

$$+\left(\operatorname{div}\mathbf{a}'_\varphi+\frac{a'_{r\varphi}}{r}+\frac{a'_{\theta\varphi}}{r\operatorname{tg}\theta}\right)\mathbf{e}_\varphi$$

我们还可求出 $\operatorname{div}\overleftrightarrow{\mathbf{A}}$ 的另一形式:

$$\operatorname{div}\overleftrightarrow{\mathbf{A}}=\nabla\cdot\overleftrightarrow{\mathbf{A}}=\nabla\cdot(\mathbf{i}\mathbf{a}_x+\mathbf{j}\mathbf{a}_y+\mathbf{k}\mathbf{a}_z)$$

$$=\mathbf{i}\cdot\nabla\mathbf{a}_x+\mathbf{j}\cdot\nabla\mathbf{a}_y+\mathbf{k}\cdot\nabla\mathbf{a}_z$$

利用(6-34)式,即得

$$\operatorname{div}\overleftrightarrow{\mathbf{A}}=\mathbf{i}\cdot\left(\mathbf{e}_r\frac{\partial\mathbf{a}_x}{\partial r}+\frac{1}{r}\mathbf{e}_\theta\frac{\partial\mathbf{a}_x}{\partial\theta}+\frac{\mathbf{e}_\varphi}{r\sin\theta}\frac{\partial\mathbf{a}_x}{\partial\varphi}\right)$$

$$+\mathbf{j}\cdot\left(\mathbf{e}_r\frac{\partial\mathbf{a}_y}{\partial r}+\frac{1}{r}\mathbf{e}_\theta\frac{\partial\mathbf{a}_y}{\partial\theta}+\frac{\mathbf{e}_\varphi}{r\sin\theta}\frac{\partial\mathbf{a}_y}{\partial\varphi}\right)$$

$$+\mathbf{k}\cdot\left(\mathbf{e}_r\frac{\partial\mathbf{a}_z}{\partial r}+\frac{1}{r}\mathbf{e}_\theta\frac{\partial\mathbf{a}_z}{\partial\theta}+\frac{\mathbf{e}_\varphi}{r\sin\theta}\frac{\partial\mathbf{a}_z}{\partial\varphi}\right)$$

$$=\mathbf{e}_r\cdot\frac{\partial\overleftrightarrow{\mathbf{A}}}{\partial r}+\mathbf{e}_\theta\cdot\frac{\partial\overleftrightarrow{\mathbf{A}}}{\partial\theta}+\mathbf{e}_\varphi\cdot\frac{\partial\overleftrightarrow{\mathbf{A}}}{\partial\varphi}$$

由于

$$\mathbf{e}_r \cdot \frac{\partial \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{A}}}{\partial r} = \frac{\partial \mathbf{a}_r}{\partial r}$$

$$\frac{1}{r}\mathbf{e}_\theta \cdot \frac{\partial \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{A}}}{\partial \theta} = \frac{1}{r}\mathbf{a}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial \mathbf{a}_\theta}{\partial \theta}$$

$$\frac{1}{r\sin\theta}\mathbf{e}_\varphi \cdot \frac{\partial \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{A}}}{\partial \varphi} = \frac{1}{r}\mathbf{a}_r + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial \mathbf{a}_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{1}{r\,\mathrm{tg}\,\theta}\mathbf{a}_\theta$$

（推导时要利用单位矢量导数的公式）

最后得

$$\mathrm{div}\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{A}} = \frac{\partial \mathbf{a}_r}{\partial r} + \frac{2\mathbf{a}_r}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \mathbf{a}_\theta}{\partial \theta} + \frac{\mathbf{a}_\theta}{r\,\mathrm{tg}\,\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial \mathbf{a}_\varphi}{\partial \varphi}$$

(3) 求 $\mathrm{rot}\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{A}}$ 的表达式

$$\begin{aligned}\mathrm{rot}\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{A}} &= \nabla \times \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{A}} \\ &= (\mathrm{rot}\mathbf{a}'_r)\mathbf{e}_r + (\mathrm{rot}\mathbf{a}'_\theta)\mathbf{e}_\theta + (\mathrm{rot}\mathbf{a}'_\varphi)\mathbf{e}_\varphi \\ &\quad - \mathbf{a}'_r \times \mathrm{grad}\mathbf{e}_r - \mathbf{a}'_\theta \times \mathrm{grad}\mathbf{e}_\theta - \mathbf{a}'_\varphi \times \mathrm{grad}\mathbf{e}_\varphi\end{aligned}$$

将这三个叉乘求出后代入上式，即得

$$\begin{aligned}\mathrm{rot}\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{A}} &= \left(\mathrm{rot}\mathbf{a}'_r + \frac{\mathbf{a}'_\theta \times \mathbf{e}_\theta}{r} + \frac{\mathbf{a}'_\varphi \times \mathbf{e}_\varphi}{r}\right)\mathbf{e}_r \\ &\quad + \left(\mathrm{rot}\mathbf{a}'_\theta - \frac{\mathbf{a}'_r \times \mathbf{e}_\theta}{r} + \frac{\mathbf{a}'_\varphi \times \mathbf{e}_\varphi}{r\,\mathrm{tg}\,\theta}\right)\mathbf{e}_\theta \\ &\quad + \left(\mathrm{rot}\mathbf{a}'_\varphi - \frac{\mathbf{a}'_r \times \mathbf{e}_\varphi}{r} - \frac{\mathbf{a}'_\theta \times \mathbf{e}_\varphi}{r\,\mathrm{tg}\,\theta}\right)\mathbf{e}_\varphi\end{aligned}$$

我们还可求出 $\mathrm{rot}\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{A}}$ 的另一表达式：

$$\begin{aligned}\mathrm{rot}\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{A}} &= \nabla \times \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{A}} \\ &= -\mathbf{i} \times \nabla\mathbf{a}_x - \mathbf{j} \times \nabla\mathbf{a}_y - \mathbf{k} \times \nabla\mathbf{a}_z \\ &= \mathbf{e}_r \times \frac{\partial \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{A}}}{\partial r} + \mathbf{e}_\theta \times \frac{1}{r}\frac{\partial \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{A}}}{\partial \theta} + \mathbf{e}_\varphi \times \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{A}}}{\partial \varphi}\end{aligned}$$

由于

$$\frac{1}{r}\mathbf{e}_\theta \times \frac{\partial \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{A}}}{\partial \theta} = \frac{-\mathbf{e}_\varphi}{r}\frac{\partial \mathbf{a}_r}{\partial \theta} + \frac{\mathbf{e}_\varphi}{r}\mathbf{a}_\theta + \frac{1}{r}\mathbf{e}_r\frac{\partial \mathbf{a}_\varphi}{\partial \theta}$$

$$\mathbf{e}_r \times \frac{\partial \overleftrightarrow{\mathbf{A}}}{\partial r} = \mathbf{e}_\varphi \frac{\partial \mathbf{a}_\theta}{\partial r} - \mathbf{e}_\theta \frac{\partial \mathbf{a}_\varphi}{\partial r}$$

$$\frac{1}{r \sin\theta} \mathbf{e}_\varphi \times \frac{\partial \overleftrightarrow{\mathbf{A}}}{\partial \varphi} = \frac{1}{r \sin\theta} \mathbf{e}_\theta \frac{\partial \mathbf{a}_r}{\partial \varphi} - \frac{\mathbf{e}_r}{r \sin\theta} \frac{\partial \mathbf{a}_\theta}{\partial \varphi}$$
$$- \frac{\mathbf{e}_\theta}{r} \mathbf{a}_\varphi + \frac{\mathbf{e}_r}{r\,\mathrm{tg}\,\theta} \mathbf{a}_\varphi$$

将此代入上式，最后得

$$\mathrm{rot}\overleftrightarrow{\mathbf{A}} = \mathbf{e}_r \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \mathbf{a}_\varphi}{\partial \theta} + \frac{\mathbf{a}_\varphi}{r\,\mathrm{tg}\,\theta} - \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial \mathbf{a}_\theta}{\partial \varphi} \right)$$
$$+ \mathbf{e}_\theta \left(\frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial \mathbf{a}_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial \mathbf{a}_\varphi}{\partial r} - \frac{\mathbf{a}_\varphi}{r} \right)$$
$$+ \mathbf{e}_\varphi \left(\frac{\partial \mathbf{a}_\theta}{\partial r} + \frac{\mathbf{a}_\theta}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial \mathbf{a}_r}{\partial \theta} \right)$$

(4) 求 $\nabla^2 \overleftrightarrow{\mathbf{A}}$ 的表达式

用在圆柱坐标系中求 $\nabla^2 \overleftrightarrow{\mathbf{A}}$ 的同样方法，我们可以立即写出：

$$\nabla^2 \overleftrightarrow{\mathbf{A}} = \mathrm{grad\ div}\overleftrightarrow{\mathbf{A}} - \mathrm{rot\ rot}\overleftrightarrow{\mathbf{A}}$$
$$= \mathbf{e}_r \left(\nabla^2 \mathbf{a}_r - \frac{2\mathbf{a}_r}{r^2} - \frac{2\mathrm{ctg}\theta}{r^2} \mathbf{a}_\theta - \frac{2}{r^2} \frac{\partial \mathbf{a}_\theta}{\partial \theta} \right.$$
$$\left. - \frac{2}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial \mathbf{a}_\varphi}{\partial \varphi} \right) + \mathbf{e}_\theta \left(\nabla^2 \mathbf{a}_\theta + \frac{2}{r^2} \frac{\partial \mathbf{a}_r}{\partial \theta} \right.$$
$$\left. - \frac{\mathbf{a}_\theta}{r^2 \sin^2\theta} - \frac{2\cos\theta}{r^2 \sin^2\theta} \frac{\partial \mathbf{a}_\varphi}{\partial \varphi} \right)$$
$$+ \mathbf{e}_\varphi \left(\nabla^2 \mathbf{a}_\varphi + \frac{2}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial \mathbf{a}_r}{\partial \varphi} - \frac{\mathbf{a}_\varphi}{r^2 \sin^2\theta} \right.$$
$$\left. + \frac{2\cos\theta}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial \mathbf{a}_\theta}{\partial \varphi} \right)$$

(5) 求 $\mathrm{grad}\mathbf{e}_r, \mathrm{grad}\mathbf{e}_\theta, \mathrm{grad}\mathbf{e}_\varphi$ 的表达式

在公式(6-32)中，将 $\mathbf{a}$ 分别换成 $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\varphi$ 后立即可得

$$\mathrm{grad}\mathbf{e}_r = \frac{\mathbf{e}_\theta \mathbf{e}_\theta}{r} + \frac{\mathbf{e}_\varphi \mathbf{e}_\varphi}{r}$$

$$\mathrm{grad}\mathbf{e}_\theta = - \frac{\mathbf{e}_\theta \mathbf{e}_r}{r} + \frac{\mathbf{e}_\varphi \mathbf{e}_\varphi}{r\,\mathrm{tg}\,\theta}$$

$$\mathrm{grad}\,\mathbf{e}_\varphi = -\frac{\mathbf{e}_\varphi\mathbf{e}_r}{r} - \frac{\mathbf{e}_\varphi\mathbf{e}_\theta}{r\,\mathrm{tg}\,\theta}$$

6-11 grad$\mathbf{a}$，div$\overleftrightarrow{\mathbf{A}}$，rot$\overleftrightarrow{\mathbf{A}}$，$\nabla^2\overleftrightarrow{\mathbf{A}}$在一般正交曲线坐标系中的表达式

根据上两节推导时的同样思路，在一般正交曲线坐标系情况下，我们可以这样来推导出 grad$\mathbf{a}$，div$\overleftrightarrow{\mathbf{A}}$，rot$\overleftrightarrow{\mathbf{A}}$，$\nabla^2\overleftrightarrow{\mathbf{A}}$ 的表达式：令

$$\overleftrightarrow{\mathbf{A}} = \mathbf{e}_u\mathbf{a}_u + \mathbf{e}_v\mathbf{a}_v + \mathbf{e}_w\mathbf{a}_w$$

$$\mathbf{a} = a_u\mathbf{e}_u + a_v\mathbf{e}_v + a_w\mathbf{e}_w$$

则

$$\mathrm{grad}\,\mathbf{a} = \frac{\mathbf{e}_u}{L_u}\frac{\partial\mathbf{a}}{\partial u} + \frac{\mathbf{e}_v}{L_v}\frac{\partial\mathbf{a}}{\partial v} + \frac{\mathbf{e}_w}{L_w}\frac{\partial\mathbf{a}}{\partial w}$$

$$\mathrm{div}\,\overleftrightarrow{\mathbf{A}} = \frac{1}{L_uL_vL_w}\left[\frac{\partial(L_vL_w\mathbf{a}_u)}{\partial u} + \frac{\partial(L_wL_u\mathbf{a}_v)}{\partial v} + \frac{\partial(L_uL_v\mathbf{a}_w)}{\partial w}\right]$$

$$\mathrm{rot}\,\overleftrightarrow{\mathbf{A}} = \frac{1}{L_uL_vL_w}\begin{vmatrix} L_u\mathbf{e}_u & L_v\mathbf{e}_v & L_w\mathbf{e}_w \\ \dfrac{\partial}{\partial u} & \dfrac{\partial}{\partial v} & \dfrac{\partial}{\partial w} \\ L_u\mathbf{a}_u & L_v\mathbf{a}_v & L_w\mathbf{a}_w \end{vmatrix}$$

如果将 $\mathbf{a}$ 展开成

$$\mathbf{a} = a_u\mathbf{e}_u + a_v\mathbf{e}_v + a_w\mathbf{e}_w$$

或将 $\mathbf{a}_u,\mathbf{a}_v,\mathbf{a}_w$ 展开成

$$\mathbf{a}_u = a_{uu}\mathbf{e}_u + a_{uv}\mathbf{e}_v + a_{uw}\mathbf{e}_w$$

$$\mathbf{a}_v = a_{vu}\mathbf{e}_u + a_{vv}\mathbf{e}_v + a_{vw}\mathbf{e}_w$$

$$\mathbf{a}_w = a_{wu}\mathbf{e}_u + a_{wv}\mathbf{e}_v + a_{ww}\mathbf{e}_w$$

并将它们代入上述三式，然后再利用 $\mathbf{e}_u,\mathbf{e}_v,\mathbf{e}_w$ 导数公式，经过代数变换，就能得到 grad$\mathbf{a}$，div$\overleftrightarrow{\mathbf{A}}$，rot$\overleftrightarrow{\mathbf{A}}$ 的展开形式了。由于公式比较繁琐，我们就不详细写出来了。

6-12 依赖于两个相互独立坐标的函数的并矢表达式

在物理学中，经常可以见到矢量或并矢函数是两组相互独立的坐标系的坐标函数。例如，物体中某一点的位置矢量(其大小为距离)，既是这个矢量起点(原点)的函数，又是这个矢量终点的函数，而且起点和终点都可以独立地选定。表示起点和终点坐标的坐标系，显然也可以独立地选定。如果现在有一个矢量或并矢是位置矢量的函数，那末在表示这个矢量或并矢的时候，显然可以写成两组独立坐标的函数。当然，矢量和并矢可以直接是两组独立坐标的函数，并不需要间接地通过位置矢量来表示。对于这样的矢量或并矢当然可以考虑它的场函数，如梯度、散度和旋度等问题。但是要强调一点，即必须明确在哪一个坐标系内考虑问题；另一坐标系则应看成参量，也就是对所考虑坐标系而言是常量。当然，参量的值可任意选定，但在选定的坐标系内进行微分运算时，这些参量是不受微分影响的。

假定有一个矢量函数 $\mathbf{a}$，它是 (x,y,z) 的函数，即

$$\mathbf{a}=\mathbf{a}(x,y,z)$$

又假设另有一个矢量函数 $\mathbf{b}$，它是 (x',y',z') 的函数，即

$$\mathbf{b}=(x',y',z')$$

并且 (x,y,z) 和 (x',y',z') 是相互独立的，即相互之间没有任何依赖关系。

显然，由这两个矢量组成的并矢 $\mathbf{ab}=\overleftrightarrow{\mathbf{A}}$ 是两组独立坐标的函数，即

$$\overleftrightarrow{\mathbf{A}}=\mathbf{a}(x,y,z)\mathbf{b}(x',y',z')$$

而它的转置则是

$$\tilde{\overleftrightarrow{\mathbf{A}}}=\mathbf{b}(x',y',z')\mathbf{a}(x,y,z)$$

由于在并矢分析中没有并矢梯度的概念，因此我们只考虑并矢 $\overleftrightarrow{\mathbf{A}}$ 的散度和旋度问题。

首先选定所考虑的坐标系统为 (x,y,z)，在这个坐标系统中 $\overleftrightarrow{\mathbf{A}}$ 的散度我们用 $\nabla\cdot\overleftrightarrow{\mathbf{A}}$ 来表示。

现求 $\nabla\cdot\overleftrightarrow{\mathbf{A}}$ 的表达式：

$$
\begin{aligned}
\nabla\cdot\overleftrightarrow{\mathbf{A}} = \bigtriangledown\cdot\overleftrightarrow{\mathbf{A}} &= \bigtriangledown\cdot[\mathbf{a}(x,y,z)\mathbf{b}(x',y',z')] \\
&= [\bigtriangledown\cdot\mathbf{a}(x,y,z)]\mathbf{b}(x',y',z') \\
&= [\nabla\cdot\mathbf{a}(x,y,z)]\mathbf{b}(x',y',z') \\
&= \mathrm{div}\,\mathbf{a}(x,y,z)\mathbf{b}(x',y',z')
\end{aligned}
$$

这里，因为相对于 (x,y,z) 坐标系而言，$\mathbf{b}(x',y',z')$ 是常量，所以 $\bigtriangledown\cdot\mathbf{a}(x,y,z)$ 可以用 $\nabla\cdot\mathbf{a}(x,y,z)$ 取代($T(\bigtriangledown)$的性质 3)。可见结果是一个矢量 $\mathbf{b}(x',y',z')$ 乘上标量 $\mathrm{div}\,\mathbf{a}(x,y,z)$ 后仍是矢量。

再求 $\bigtriangledown$ 的转置 $\widetilde{\overleftrightarrow{\mathbf{A}}}$ 在 (x,y,z) 坐标系内的散度：

$$
\begin{aligned}
\nabla\cdot\widetilde{\overleftrightarrow{\mathbf{A}}} = \bigtriangledown\cdot\widetilde{\overleftrightarrow{\mathbf{A}}} &= \bigtriangledown\cdot[\mathbf{b}(x',y',z')\mathbf{a}(x,y,z)] \\
&= [\bigtriangledown\cdot\mathbf{b}(x',y',z')]\mathbf{a}(x,y,z)
\end{aligned}
$$

由于对 (x,y,z) 而言 $\mathbf{b}(x',y',z')$ 是常数，而微分是在 (x,y,z) 坐标系中进行的，因此

$$
\bigtriangledown\cdot\mathbf{b}(x',y',z') = 0
$$

故

$$
\nabla\cdot\widetilde{\overleftrightarrow{\mathbf{A}}} = 0
$$

可见结果为零。

现在选定所考虑的坐标系统为 (x',y',z')，则在这个坐标系内的散度，我们用 $\nabla'\cdot\overleftrightarrow{\mathbf{A}}$ 来表示：

$$
\begin{aligned}
\nabla'\cdot\overleftrightarrow{\mathbf{A}} = \bigtriangledown'\cdot\overleftrightarrow{\mathbf{A}} &= \bigtriangledown'\cdot[\mathbf{a}(x,y,z)\mathbf{b}(x',y',z')] \\
&= [\bigtriangledown'\cdot\mathbf{a}(x,y,z)]\mathbf{b}(x',y',z') \\
&= 0
\end{aligned}
$$

因为 $\bigtriangledown'\cdot\mathbf{a}(x,y,z) = 0$，同理，

$$
\begin{aligned}
\nabla'\cdot\widetilde{\overleftrightarrow{\mathbf{A}}} = \bigtriangledown'\cdot\widetilde{\overleftrightarrow{\mathbf{A}}} &= \bigtriangledown'\cdot[\mathbf{b}(x',y',z')\mathbf{a}(x,y,z)] \\
&= [\bigtriangledown'\cdot\mathbf{b}(x',y',z')]\mathbf{a}(x,y,z) \\
&= [\nabla'\cdot\mathbf{b}(x',y',z')]\mathbf{a}(x,y,z)
\end{aligned}
$$

$$= [\mathrm{div}'\mathbf{b}(x',y',z')]\mathbf{a}(x,y,z)$$

为一矢量。

下面以同样的方式来考虑旋度问题。

在 (x,y,z) 坐标系内，

$$\nabla \times \overleftrightarrow{\mathbf{A}} = \bigtriangledown \times \overleftrightarrow{\mathbf{A}} = \bigtriangledown \times [\mathbf{a}(x,y,z)\mathbf{b}(x',y',z')]$$
$$= [\bigtriangledown \times \mathbf{a}(x,y,z)]\mathbf{b}(x',y',z')$$
$$= [\nabla \times \mathbf{a}(x,y,z')]\mathbf{b}(x',y',z')$$
$$= \mathrm{rot}\,\mathbf{a}(x,y,z)\mathbf{b}(x',y',z')$$

可见结果为一并矢。其次，

$$\nabla \times \widetilde{\overleftrightarrow{\mathbf{A}}} = \bigtriangledown \times \widetilde{\overleftrightarrow{\mathbf{A}}} = \bigtriangledown \times [\mathbf{b}(x',y',z')\mathbf{a}(x,y,z)]$$
$$= [\bigtriangledown \times \mathbf{b}(x',y',z')]\mathbf{a}(x,y,z)$$
$$= 0\mathbf{a}(x,y,z) = 0$$

可见结果为零。

在 (x',y',z') 坐标系内，

$$\nabla' \times \overleftrightarrow{\mathbf{A}} = \bigtriangledown' \times \overleftrightarrow{\mathbf{A}}$$
$$= \bigtriangledown' \times [\mathbf{a}(x,y,z)\mathbf{b}(x',y',z')]$$
$$= [\bigtriangledown' \times \mathbf{a}(x,y,z)]\mathbf{b}(x,y,z)$$
$$= 0$$

可见 $\overleftrightarrow{\mathbf{A}}$ 的旋度为 0。

$$\nabla' \times \widetilde{\overleftrightarrow{\mathbf{A}}} = \bigtriangledown' \times \widetilde{\overleftrightarrow{\mathbf{A}}}$$
$$= \bigtriangledown' \times [\mathbf{b}(x',y',z')\mathbf{a}(x,y,z)]$$
$$= [\bigtriangledown' \times \mathbf{b}(x',y',z')]\mathbf{a}(x,y,z)$$
$$= [\nabla' \times \mathbf{b}(x',y',z')]\mathbf{a}(x,y,z)$$
$$= \mathrm{rot}'\mathbf{b}(x',y',z')\mathbf{a}(x,y,z)$$

可见在 (x',y',z') 坐标系内，$\widetilde{\overleftrightarrow{\mathbf{A}}}$ 转置的旋度为一并矢。

参考文献

[1] Tai, C. T., Generalized Vector and Dyadic Analysis, IEEE Press, 1991.

[2] Heaviside, O., Electromagnetic Theory, Chelsea Publishing Company, New York, 1970, 1971.

[3] Кочин, Н. Е., векторное исчисление и начала тензорного исчисления, Издательство 〈Наука〉, 1964.

[4] Дубнов, Я. С., Основы векторного исчисления, часть II, Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1951.

[5] Шилов, Г. Е., лекции по векторному анализу, Гостехиздат, 1954.

[6] 方能航,电磁理论导引,科学出版社,北京,1986.

[7] Wilson, E. B., Vector Analysis, Charles Scribner's Sons, New York, 1901.

[8] Gibbs, J. W., The Scientific Papers of J. W. Gibbs, Vol II, Dover Publications, New York, 1961.

[9] Sommerfeld, A., Electrodynamics, Academic Press, N. Y. 1952.